



Equation de Schrödinger non-linéaire et impuretés dans les systèmes intégrables

Vincent Caudrelier

► To cite this version:

Vincent Caudrelier. Equation de Schrödinger non-linéaire et impuretés dans les systèmes intégrables. Physique mathématique [math-ph]. Université de Savoie, 2005. Français. <tel-00009612>

HAL Id: tel-00009612

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009612>

Submitted on 27 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique Théorique

THÈSE

Présentée par **Vincent CAUDRELIER**

devant l'UNIVERSITÉ DE SAVOIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN PHYSIQUE

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

Sujet :

ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON-LINÉAIRE et IMPURETÉS DANS LES SYSTÈMES INTÉGRABLES

Rapporteurs : Olivier BABELON
 Ed CORRIGAN

Membres du jury : Olivier BABELON
 Denis BERNARD
 Patrick DOREY
 Luc FRAPPAT Président du jury
 Mihail MINTCHEV
 Éric RAGOUCY Directeur de thèse

7 juin 2005

Résumé:

Cette thèse s'inscrit dans le domaine des systèmes intégrables et s'attache en particulier à un système de prédilection : l'équation de Schrödinger non-linéaire. Elle traite également d'un thème assez controversé : l'inclusion d'impuretés dans les systèmes intégrables et montre pour la première fois qu'il est possible de préserver l'intégrabilité d'un système avec interaction en incluant une impureté.

Pour bien appréhender l'ensemble des résultats de cette thèse, le manuscrit est constitué de trois parties. Les deux premières sont consacrées à la présentation de résultats fondamentaux en théorie des systèmes intégrables. Ces résultats sont directement nécessaires à la bonne compréhension des travaux effectués. La première partie resitue la célèbre équation de Yang-Baxter dans son contexte historique et montre en quoi elle constitue la clé de voûte de différents aspects du domaine. La deuxième partie se focalise sur l'équation de Schrödinger non-linéaire et sur des modèles de spins dynamiques au coeur de mon travail.

Enfin la troisième partie contient le travail de thèse proprement dit avec, dans le premier chapitre, une discussion détaillée des travaux regroupés en quatre thèmes de recherche : équation de super-Schrödinger non-linéaire, Hamiltoniens intégrables avec bord et symétrie, intégrabilité, factorisation et interaction en présence d'une impureté et enfin, problème à N corps exactement résoluble avec impureté. Les articles originaux sont joints dans le deuxième chapitre et apportent les détails techniques illustrant les discussions du premier chapitre.

Abstract:

This thesis deals with integrable systems and is especially devoted to a system of special interest: the nonlinear Schrödinger equation. Some controversial aspects are addressed as well, that is, the issue of including impurities in integrable systems. It is shown for the first time that one can preserve the integrability of an interacting system while including an impurity.

To shed more light on the results obtained during the PhD, the present manuscript is divided into three parts, the first two concerning fundamental results in integrable systems. The first part recasts the famous Yang-Baxter equation in its historical context and emphasizes its central role in various aspects of the field. The second part focuses on the nonlinear Schrödinger equation and on dynamical spins systems which are the core of my work.

Finally, the third part contains my work itself. In the first chapter, a detailed discussion is carried out for the works gathered in four research areas: nonlinear super-Schrödinger equation, integrable Hamiltonians with boundary and symmetry, integrability, factorization and interaction in the presence of an impurity and eventually, exactly solvable many-body problem with impurity. The original articles are collected in the second chapter. They illustrate the discussions of the first chapter and can be referred to for technical details.

REMERCIEMENTS

Je voudrais profiter de l'occasion de ce manuscrit pour remercier toutes les personnes qui ont contribué, chacune à leur manière, à l'aboutissement de cette étape importante de mon aventure.

Dans l'ordre chronologique, mes pensées se tournent d'abord vers Julien Lesgourgues et puis Paul Sorba qui furent mes premiers contacts au LAPTH et grâce à qui j'ai pu rencontré mon directeur de thèse, Éric Ragoucy, sans qui tout cela n'aurait pas été possible. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir fait confiance à un moment où j'en avais besoin. Il a su me communiquer son goût et son dynamisme impressionnant pour la recherche fondamentale et j'ai beaucoup appris à son contact et grâce à sa grande disponibilité. C'est vrai aussi des autres membres "intégristes", Daniel Arnaudon, Luc Frappat et Paul Sorba, dont l'immense expérience n'a d'égal que le sens de l'humour. Une mention spéciale pour l'autre "petit jeune" du groupe, Nicolas Crampé, qui fut tour à tour voisin de bureau, consultant scientifique, collègue de travail et confident d'états d'âme.

De façon générale, la bonne humeur et la disponibilité de l'ensemble des personnes du LAPTH m'ont permis de passer trois années excellentes et de travailler avec beaucoup de plaisir. Merci à la direction et à l'équipe administrative pour leur efficacité et leur écoute. Merci à tous les "piliers (pilons?) de la pause café" pour leurs calembours et autres débats animés.

Toujours dans le cercle professionnel mais en dehors du laboratoire, je tiens aussi à remercier Mihail Mintchev dont les compétences extraordinaires ont rendu notre collaboration très enrichissante et agréable. Mon poste de moniteur à l'Université de Savoie m'a également permis de côtoyer des personnes de qualité et d'apprécier le métier d'enseignant-chercheur.

Enfin, je remercie Olivier Babelon et Edward Corrigan qui ont accepté l'exercice difficile d'être rapporteurs de thèse ainsi que Denis Bernard, Patrick Dorey et Mihail Mintchev qui se joignent à Luc et Éric pour former le jury de ma thèse.

Je termine ces remerciements par une touche personnelle pour ma famille et ma future belle-famille qui m'ont soutenu (et supporté...) pendant toutes ces années. Mes pensées se tournent aussi vers mes amis de longue date qui ont accompagné mon parcours, notamment depuis le lycée.

Un merci tout particulier à Emmanuel Fromager, alias Manu, dont la contribution à mon parcours scientifique et l'amitié profonde sont indéniables.

Et le (enfin la) meilleur(e) pour la fin : ma future épouse et la future maman de notre petite fille, "ma p'tite bonne femme" qui m'accompagne et me soutient depuis tellement longtemps que les remerciements que je veux lui faire ici en paraissent dérisoires. Qu'à cela ne tienne : MERCI.

Table des matières

I	L'équation de Yang-Baxter quantique	9
1	Origine historique et physique de l'équation de Yang-Baxter	11
I.1.1	Modèles de gaz imparfaits à basse température	11
I.1.2	Description mathématique	15
I.1.2.1	Extensions auto-adjointes	15
I.1.2.2	Conditions aux bords	18
I.1.3	Interaction de contact dans le problème à N corps	20
I.1.3.1	Le gaz de bosons	20
I.1.3.2	Généralisation de la statistique	25
2	Matrices de diffusion exactes	31
I.2.1	Résultats généraux	31
I.2.2	Description algébrique des états asymptotiques	37
I.2.2.1	Algèbre de Zamolodchikov-Faddeev	37
I.2.2.2	Représentation de Fock	41
I.2.2.3	Opérateurs "bien élevés"	46
I.2.3	Inclusion d'un bord	47
I.2.3.1	Opérateur de bord	48
I.2.3.2	Algèbre de bord	50
I.2.4	Inclusion d'un défaut	54
I.2.4.1	Opérateur de défaut	54
I.2.4.2	Algèbre de Réflexion-Transmission	56
3	Symétries dans les systèmes intégrables	61
I.3.1	Yangien	62
I.3.2	Sous-algèbre et super-algèbre	66
I.3.2.1	Algèbre de réflexion	66
I.3.2.2	Super-Yangien	67
II	Méthodes de résolution des systèmes intégrables	71
1	L'équation de Schrödinger non-linéaire classique	73
II.1.1	Présentation du modèle	74
II.1.2	Intégrabilité et résolution	75

II.1.2.1	Paire de Lax et problème direct	76
II.1.2.2	Problème inverse	84
2	L'équation de Schrödinger non linéaire quantique	91
II.2.1	Méthode de diffusion inverse quantique	92
II.2.1.1	Quantification du problème direct	92
II.2.1.2	Quantification de la solution	96
3	Modèles de spins dynamiques	99
II.3.1	Interactions intégrables	100
II.3.2	De l'algèbre à l'Hamiltonien intégrable	103
III	Contributions du travail de thèse	109
1	Travaux de thèse et discussions	113
III.1.1	L'équation de super-Schrödinger non-linéaire	113
III.1.2	Hamiltoniens intégrables avec bord	114
III.1.3	Intégrabilité et factorisation en présence d'une impureté . . .	116
III.1.3.1	Discussion générale	116
III.1.3.2	Factorisation en présence de réflexion et transmission	117
III.1.4	Impureté dans le problème à N corps en interaction de contact	119
2	Publications des travaux de thèse	123

Introduction

Introduire la notion de système intégrable est un exercice difficile. Même dans un ouvrage conséquent, il est impossible de rendre compte de tous les aspects, tant physiques que mathématiques, recouverts par le domaine très actif de physique mathématique connu sous le nom de *systèmes intégrables*. C'est donc éclairé et influencé par mes travaux de thèse que j'ai choisi de présenter certains aspects fondamentaux de ce thème de recherche qui constituent les bases nécessaires pour comprendre les enjeux et les résultats obtenus pendant mon travail de thèse. Ainsi par exemple, dans l'historique de l'équation de Yang-Baxter, j'insisterai beaucoup sur les travaux de C.N. Yang, laissant de côté les importants travaux de R.J. Baxter. De même, dans la description de structures mathématiques telles que le Yangien, j'adopterai une vision très biaisée et pragmatique pour me concentrer sur une présentation qui se révèle très utile pour l'étude de modèles physiques, privilégiant ainsi les travaux de L.D. Faddeev et ses collaborateurs par rapport à ceux de V.G. Drinfel'd. Enfin, ma description de la méthode de diffusion inverse (classique et quantique) sera très largement dédiée au modèle qui est au centre de mes travaux : l'équation de Schrödinger non-linéaire. Mais il est important de noter que cette méthode s'applique tout aussi fructueusement pour des systèmes discrets ou sur réseau comme les chaînes de spin et les modèles à six ou huit vertex. Malgré ma tentative de cerner ce que je laisse de côté, je suis persuadé d'avoir oublié de mentionner encore énormément de développements très importants. Fort de ce constat, je vais introduire quelques aspects importants du thème des systèmes intégrables qui sont à la base de ce manuscrit.

Généralités sur les systèmes intégrables

Le terme *système intégrable* trouve son origine dans l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique classique analytique (voir par exemple [58]) rattachée à de grands noms comme Lagrange, Hamilton, Poisson, Liouville ou encore Jacobi [70, 85]. L'idée est que, pour un système Hamiltonien possédant certaines propriétés que nous allons décrire, il est possible d'effectuer une transformation rendant les équations du mouvement particulièrement simples à résoudre. En particulier, en terme des nouvelles variables, on peut facilement *intégrer* les équations du mouvement par rapport au temps et ainsi résoudre le problème. Ce résultat important dû à J. Liouville explique pourquoi la notion de système intégrable (maintenant appliquée à de nombreux

systèmes autres que les systèmes hamiltoniens classiques) est toujours accompagnée de la notion de système complètement ou exactement résoluble et ce, même dans les situations où un résultat analogue à celui de J. Liouville n'est pas démontré (par exemple en théorie quantique des champs). Il est toutefois remarquable que, même dans ces contextes, la notion d'intégrabilité (étendue par analogie) permet bien souvent de résoudre complètement le système ou du moins d'obtenir nombreuses informations de façon non perturbative. Bien entendu, cela ne se fait pas aussi systématiquement que pour les systèmes hamiltoniens classiques et on peut dire en fait que le domaine des systèmes intégrables, de nos jours, regroupe l'ensemble des méthodes mathématiques développées pour résoudre effectivement un système physique dont on a montré qu'il est *intégrable* (au sens de Liouville). Les systèmes intégrables sont donc un lieu privilégié de rencontre entre mathématiques et physique avec tous les bénéfices que cela comporte.

Il est temps de préciser tous ces propos. En mécanique classique, l'espace des phases \mathcal{M} d'un système dynamique est une variété de Poisson de dimension $2m$. Cela signifie que l'espace $C^\infty(\mathcal{M})$ des fonctions infiniment dérivables sur \mathcal{M} est équipé d'une structure de Poisson donnée par une application bilinéaire $\{, \}$: $C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ possédant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\{f_1, f_2\} &= -\{f_2, f_1\}, \\ \{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} &= 0, \\ \{f_1 f_2, f_3\} &= f_1 \{f_2, f_3\} + \{f_1, f_3\} f_2,\end{aligned}$$

pour $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathcal{M})$. Les deux premières relations assurent que $\{, \}$ est un *crochet de Lie* et la troisième est l'identité de Leibniz assurant que l'application $D_f : g \mapsto \{g, f\}$ pour $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une dérivation. Pour ce qui nous intéresse dans la suite, nous noterons x_1, \dots, x_m et p_1, \dots, p_m les coordonnées locales de \mathcal{M} et nous considérerons la structure de Poisson donnée par

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

"L'état" du système au cours du temps t est l'application $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ et l'évolution d'une observable $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ d'un système décrit par l'Hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est donnée par

$$\frac{d}{dt} f(e(t)) = \{H, f\}(e(t)).$$

Dans la pratique, on oublie la dépendance explicite en t et on note souvent $\frac{df}{dt} = \{H, f\}$. Deux observables $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{M})$ sont dites *en involution* si $\{f_1, f_2\} = 0$.

Définition 1 *Un système dynamique défini sur une variété de Poisson \mathcal{M} de dimension $2m$ par un Hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est dit intégrable (au sens*

de Liouville) s'il existe m quantités indépendantes et conservées F_1, \dots, F_m en involution

$$\{H, F_j\} = 0 \quad , \quad \{F_i, F_j\} = 0 \, .$$

H n'est pas indépendant des F_j (c'est d'ailleurs souvent un des F_j dans la pratique).

La notion d'indépendance dans cette définition peut être définie rigoureusement (voir par exemple [25]). Intuitivement, nous dirons simplement qu'il n'existe pas de relation fonctionnelle entre les F_j . On a alors le résultat fondamental suivant

Théorème 2 *Etant donné un système intégrable d'Hamiltonien H , il existe une transformation canonique $(x_j, p_j) \mapsto (\phi_j, F_j)$ telle que les équations du mouvement*

$$\frac{dx_j}{dt} = \{H, x_j\} \quad , \quad \frac{dp_j}{dt} = \{H, p_j\} \, ,$$

deviennent

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \{H, \phi_j\} = \omega_j \quad , \quad \frac{dF_j}{dt} = 0 \, ,$$

ω_j étant indépendant de t . On obtient alors les équations du mouvement par simple intégration (ou quadrature),

$$\phi_j(t) = \phi_j(0) + \omega_j t \quad , \quad F_j(t) = F_j(0) \, .$$

A une transformation canonique près, les nouvelles variables ϕ_j, F_j sont les variables appelées "action-angle". Dans ce manuscrit, nous serons principalement intéressés par des systèmes de mécanique quantique et de théorie des champs (classique et quantique). Dans ces contextes, la définition de système intégrable est étendue par analogie avec le cas présenté ci-dessus. Ainsi, un système sera dit intégrable s'il existe autant de quantités conservées indépendantes et en involution que de degrés de liberté. Pour une théorie des champs où il y a une infinité (continue) de degrés de liberté, il est alors convenu que l'intégrabilité est obtenue pour un ensemble dénombrable de quantités conservées indépendantes et en involution. Gardant cela en mémoire dans tout le reste du manuscrit, nous fermons cette parenthèse.

Il faut savoir que le nombre de tels systèmes est resté pendant longtemps très limité, ne facilitant pas le développement de ces résultats. Cela s'est débloquent avec l'apparition de plusieurs méthodes permettant la construction et la résolution de toute une classe de systèmes intégrables. Citons par exemple la méthode dite *de diffusion inverse* initiée par I.M. Gel'fand, B.M. Levitan [56] et V.A. Marchenko [87] et qui permet de reconstruire un potentiel de diffusion à partir d'information sur les ondes diffusées. Mais l'essor de cette méthode est venu avec les travaux de C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal et R.M. Miura [52] qui ont utilisé cette méthode pour trouver les solutions

de type "soliton" de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire connue sous le nom d'équation de Korteweg-de Vries [76] en dimension $1 + 1$. Nous reviendrons sur cette méthode dans la deuxième partie de ce manuscrit dans le cadre d'une autre équation non-linéaire qui a été résolue dans ce contexte : *l'équation de Schrödinger non-linéaire*. L'idée est en fait de combiner cette méthode à une autre, la méthode du *problème auxiliaire ou spectral* développée par V.E. Zakharov et A.B. Shabat [133] pour l'équation de Schrödinger non-linéaire. Il s'agit de construire un problème différentiel dont le potentiel de diffusion est le champ que l'on cherche. En appliquant la méthode de diffusion inverse on peut donc reconstruire ce champ. Notons qu'une interprétation hamiltonienne du problème inverse comme transformation canonique vers des variables "action-angle" a été obtenue par V.E. Zakharov et L.D. Faddeev [131]. Citons aussi les travaux importants de M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell et H. Segur [1, 2, 3] qui étendirent cette méthode à une grande variété d'équations non-linéaires dont l'équation de sine-Gordon.

Il se trouve que cette procédure est reliée à la méthode de la paire de Lax [79] qui fournit le contexte mathématique nécessaire à la formulation du problème spectral. En fait, la paire de Lax est un des outils principaux dans la résolution mais aussi dans la construction de systèmes intégrables. Cela vient du fait que, étant donnée une paire (*i.e.*, en mécanique classique, deux fonctions L et M sur \mathcal{M} à valeurs dans une algèbre de Lie et codant l'équation d'évolution d'un système hamiltonien), on peut construire des quantités conservées en involution très facilement à partir de la trace des puissances de L (une représentation de l'algèbre de Lie étant donnée). Tout cela peut être reformulé grâce au *formalisme de la matrice r classique* développé par E.K. Sklyanin [118] et donnant lieu aux équations de Yang-Baxter classiques dont les solutions ont été classées par A.A. Belavin et V.G. Drinfel'd [14, 15, 16]. Cette méthode de la matrice r classique est à la base des travaux de l'école de St-Petersbourg visant à quantifier cette approche afin d'obtenir des systèmes intégrables quantiques (voir par exemple la thèse de E.K. Sklyanin [119] et les références à l'intérieur). Cela a abouti à la *méthode de la matrice R quantique* dont une propriété fondamentale est qu'elle vérifie *l'équation de Yang-Baxter quantique* qui était apparue complètement indépendamment dans les travaux de C.N. Yang traitant de la résolution exacte du problème à N corps en interaction de contact [128] et de R.J. Baxter sur la résolution du modèle de physique statistique appelé modèle à huit vertex [8]. La méthode de la matrice R quantique et tous les développements qu'elle a suscités sont à l'origine du concept mathématique de *groupe quantique* [40, 71].

Ce concept a contribué à un nouvel essor de l'étude des symétries en physique. Le rôle des symétries afin de simplifier la résolution de problèmes physiques est connu de tout étudiant ayant eu à résoudre un problème de magnétostatique. Un pas important a été franchi au siècle dernier où les symétries sont devenues de véritables outils de compréhension et de prédiction (groupe de Poincaré en relativité restreinte, groupe de jauge dans le modèle standard, etc). L'identification d'une structure de symétrie dans un système

physique impose que les mécanismes et les processus de ce système se fassent de telle façon que la structure de symétrie reste inchangée. On comprend donc intuitivement que ces symétries contraignent la façon dont le système peut se comporter. Ainsi, plus une structure de symétrie sera riche, plus on aura d'informations sur les évolutions possibles d'un système. Il n'est donc pas surprenant que pour les systèmes intégrables, les structures de symétries soient les plus complètes possibles, allant de l'algèbre de Lie classique de dimension finie jusqu'à des structures de *symétrie de dimension infinie*. Ces dernières trouvent une formulation naturelle dans le concept de groupe quantique. En outre, la méthode de la matrice r classique ou celle de la matrice R quantique permettent de mettre en évidence ces structures au niveau classique et quantique respectivement. Pour le Yangien [40], qui sera la structure algébrique (de symétrie) privilégiée dans ce manuscrit, citons les travaux de J. Avan, O. Babelon et E. Billey montrant que le modèle de Euler-Calogero-Moser possède une algèbre de symétrie étendue exacte donnée par le Yangien classique [7]. Au niveau quantique, la symétrie yangienne a été également identifiée pour des modèles de spins dynamiques du type Calogero-Sutherland [11] ou encore pour le modèle de Haldane-Shastry [64].

Tous ces développements seront repris (plus ou moins en profondeur) dans les deux premières parties de ce manuscrit en utilisant l'équation de Schrödinger non-linéaire et les modèles de spins dynamiques comme supports principaux. Notons que tout comme l'équation de Schrödinger non-linéaire, les systèmes intégrables "modernes", *i.e.* ceux concernés par les discussions précédentes, sont en dimension $1 + 1$ (une spatiale et une temporelle) ou 2 (deux spatiales) pour les systèmes de physique statistique. De façon générale, ce sont des systèmes bidimensionnels.

Bidimensionalité : avantages et intérêts

La question de la dimensionalité en physique est somme toute assez récente. Il est difficile de savoir comment elle était appréhendée avant l'introduction des coordonnées cartésiennes et les travaux de Newton fixant un univers à trois dimensions spatiales subissant les effets d'un temps absolu t . La révolution apportée par la relativité restreinte d'Albert Einstein en 1905 ne changea pas fondamentalement le nombre de dimensions envisagées qui restaient $3 + 1$. Il fallut attendre 1919 (puis 1926) avec les travaux de T. Kaluza et O. Klein pour voir émerger l'hypothèse d'une autre dimensionalité, à savoir $4 + 1$, permettant d'unifier la théorie de l'électromagnétisme et celle de la relativité générale. Cependant, l'apparition d'un champ scalaire supplémentaire et la présence de la cinquième dimension rendaient la théorie difficilement acceptable à l'époque et ce n'est qu'à partir des années 80 que les physiciens remirent cette approche à l'honneur.

De nos jours, nous sommes habitués à passer d'une dimensionalité à l'autre et il n'est pas rare de devoir jongler entre des situations différentes de $3 + 1$ dimensions. Commençons par la théorie des cordes qui constitue un

candidat important dans la tentative de description unifiée des interactions fondamentales de la Nature. Cette théorie si fondamentale est basée sur des dimensionalités toutes différentes de $3+1$: tout d'abord, la surface d'univers paramétrant les coordonnées d'espace-temps de la corde est bidimensionnelle et l'étude de la théorie des champs conforme qui s'y rattache a stimulé et stimule toujours une partie des systèmes intégrables. En outre, dans sa première version (bosonique), la théorie des cordes n'était viable que dans un univers à $25+1$ dimensions. L'avènement de la supersymétrie permit alors de réduire cela à $10+1$ dimensions. Une grande partie des travaux actuels consiste à "compactifier" ces théories pour revenir aux fameuses $3+1$ dimensions. Continuons avec les modèles cosmologiques dit "branaires", inspirés des travaux de Kaluza-Klein et démocratisés par la théorie des cordes, qui envisagent notre univers à $3+1$ dimensions comme une "membrane" plongé dans un univers "plus gros" dont les lois physiques seraient transmises à notre univers par projection. Encore une fois, le recours à des dimensionalités différentes permet d'expliquer certains problèmes comme le problème de hiérarchie dans les échelles d'énergie [109]. Enfin, une technique de renormalisation bien connue en théorie quantique des champs, la renormalisation dimensionnelle, consiste à passer de 4 à d dimensions de telle façon que le "cut-off" soit $\varepsilon = 4 - d$. Les divergences sont identifiées comme des pôles en ε et les contre-termes sont calculés pour supprimer ces divergences. On retrouve la théorie initiale renormalisée en prenant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On le voit, nous sommes maintenant largement habitués à travailler dans des dimensionalités différentes de $3+1$. Ainsi en particulier, de nombreux développements ont été menés pour des théories bidimensionnelles en raison des motivations suivantes (non exhaustives). En effet, l'avantage de ces théories est l'arsenal de techniques non-perturbatives dont on dispose pour les étudier. Quelques exemples ont déjà été présentés dans les généralités ci-dessus mais on pourrait rajouter tous les outils propres à la théorie conforme. De ce point de vue, on avance souvent l'argument suivant en faveur des théories bidimensionnelles : elles fournissent des théories contrôlables dans le contexte de la théorie quantique des champs permettant de tester et de valider des techniques perturbatives que l'on cherche ensuite à appliquer à des théories "plus réalistes" (voir [114] pour une revue sur les théories quantiques des champs bidimensionnelles). C'est indéniable en effet mais ce n'est pas tout. De nombreux effets physiques observés aujourd'hui sont propres à une dimensionalité "réduite" et n'auraient pas été étudiés sans l'acceptation de l'intérêt des dimensions inférieures à $3+1$. Citons l'exemple célèbre des statistiques fractionnaires [80, 81]. Enfin, il est maintenant clair que les théories bidimensionnelles ont des applications directes et ne servent pas uniquement de cas d'école. Grâce au concept d'universalité qui a émergé de l'étude des phénomènes critiques pour une large classe de modèles bidimensionnels, on peut maintenant prédire le comportement de systèmes très complexes en identifiant leur classe d'universalité et le modèle bidimensionnel plus simple correspondant. En outre, la maîtrise technologique actuelle et la miniatu-

risation sont également une source de systèmes bidimensionnels. Par cela, il faut comprendre que certaines dimensions de composants (électroniques par exemple) sont inférieures à la longueur de corrélation propre au système (par exemple la longueur de corrélation d'un système d'électrons dans un semi-conducteur) de telle façon qu'un modèle bidimensionnel traduit correctement le comportement du système. Dans ce manuscrit, un exemple sera privilégié : un système de particules en interaction à très courte distance et à une dimension spatiale. Il se trouve que ce système (et ses variantes) permet de prédire le comportement d'un gaz d'atomes froids confinés dans un réseau optique [100, 101]. Enfin, dans le même contexte, les expériences sur les atomes froids ont permis de mettre en évidence le phénomène de condensation de Bose-Einstein [19, 20, 33]. Théoriquement, ce phénomène est modélisé par l'équation de Gross-Pitaevskii [59, 103] qui n'est autre que l'équation de Schrödinger non-linéaire. Ainsi, une expérience de condensation de Bose-Einstein dans un réseau optique à une dimension sera décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire à $1 + 1$ dimensions qui est au coeur de ce manuscrit.

Au-delà de l'application importante que l'on vient de citer pour cette équation, l'équation de Schrödinger non-linéaire tient vraiment un rôle particulier en physique et dans le domaine des systèmes intégrables. Elle apparaît en optique non-linéaire comme modèle de propagation dans des milieux dispersifs de type Kerr ou encore dans l'évolution d'ondes de surface dans des eaux suffisamment profondes (voir par exemple [4]). Elle est toujours d'actualité et intervient dans la description d'impulsions dans les fibres optiques [75] ou de solitons dans les cristaux liquides [30]. On pourrait multiplier les exemples. Pour les systèmes intégrables, elle est un des modèles fondamentaux ayant permis le développement de la méthode de diffusion inverse et de son analogue quantique [119], la découverte de l'algèbre de Zamolodchikov-Faddeev [43] et la quantification de l'approche de Rosales [113, 32]. Elle correspond à la version continue de la chaîne de spin XXX (en particulier du point de vue de l'ansatz de Bethe algébrique) [69] et à la limite non-relativiste et de couplage faible de l'équation de Klein-Gordon non-linéaire et de l'équation de sine-Gordon (voir par exemple [74] et les références à l'intérieur) ainsi que de la théorie ϕ^4 (voir par exemple [61]).

Toutes ces raisons en font un excellent candidat pour tester ou valider de nouveaux résultats théoriques dans les systèmes intégrables. Par exemple, elle a joué un rôle important dans la découverte de symétries étendues dont nous avons déjà parlé, avec les travaux de S. Murakami et M. Wadati [97] et de M. Mintchev, É. Ragoucy, P. Sorba et Ph. Zaugg [93]. Elle a donné un cadre physique aux développements algébriques liés à la présence d'un bord dans les systèmes intégrables [57, 84] en montrant l'importance de l'algèbre de bord [84] comme généralisation de l'algèbre de Zamolodchikov-Faddeev au cas avec bord pour la méthode de diffusion inverse quantique [53]. Depuis dix ans, la généralisation de ces questions à des situations où le bord n'est pas purement réflexif est au coeur de recherches actives [36, 37, 24, 92]. Dans

ce contexte, une partie de mon travail de thèse a consisté à utiliser l'équation de Schrödinger non-linéaire comme cadre physique pour valider l'approche algébrique de [92] pour la description d'impuretés, ou de défauts (*i.e.* de bords non purement réflexifs).

Plan du manuscrit

Le manuscrit s'articule autour de trois parties avec des objectifs précis. La première partie, composée de trois chapitres, est dédiée à l'équation de Yang-Baxter (quantique) depuis son origine historique et physique jusqu'à son rôle primordial dans certaines approches modernes des systèmes intégrables quantiques : factorisation des processus de diffusion, matrice de diffusion exacte, description algébrique d'états asymptotiques et relation de définition de structures algébriques comme le Yangien par exemple. Cette partie est aussi l'occasion de revoir les différentes approches algébriques que cela a suscité dans le cadre de théories factorisables en présence d'un bord ou d'une impureté.

La deuxième partie, également composée de trois chapitres, est largement consacrée à l'équation de Schrödinger (classique et quantique) qui est le système intégrable au coeur de ma thèse. Cela nous permet de revoir la méthode de diffusion inverse et son analogue quantique dans les deux premiers chapitres. Là encore, nous essayons de montrer le rôle important de l'équation de Yang-Baxter dans les approches algébriques de résolution de systèmes intégrables. Le troisième chapitre souligne encore davantage l'intérêt des approches algébriques basées sur l'équation de Yang-Baxter. En effet, nous présentons une façon de construire un système intégrable possédant une symétrie donnée à partir de la structure algébrique correspondante définie grâce à l'équation de Yang-Baxter. Le système en question est un modèle de spins dynamiques avec interaction à distance du type Calogero-Sutherland.

Enfin, la troisième partie concerne mon travail de thèse et se décline en deux chapitres. Dans le premier chapitre, les différents résultats obtenus pendant ma thèse sont regroupés par thème de recherche et discutés à la lumière des notions introduites dans les deux premières parties. Il y a quatre thèmes : l'équation de super-Schrödinger non-linéaire, la construction d'un système intégrable possédant l'algèbre de réflexion comme symétrie, l'inclusion d'une impureté dans les systèmes intégrables avec la résolution explicite de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec impureté et enfin, la construction et la résolution d'un système exactement résoluble de particules en interaction de contact en présence d'une impureté modulable. Ce dernier thème ouvre des perspectives intéressantes vers un autre domaine, la physique de la matière condensée, que nous discutons dans la conclusion. Le deuxième chapitre est constitué des articles écrits pendant la thèse et sert de support technique au premier chapitre qui est volontairement axé sur les idées et non pas sur les calculs. La conclusion synthétise les apports du travail de thèse et montre quelques nouvelles directions de recherche que j'envisage pour l'avenir.

Première partie

L'équation de Yang-Baxter
quantique

Chapitre 1

Origine historique et physique de l'équation de Yang-Baxter

Avant de prendre la place fondamentale qu'on lui connaît dans les systèmes intégrables et les structures algébriques qui s'y rattachent, la célèbre équation de Yang-Baxter est apparue comme relation de cohérence dans la résolution exacte de modèles physiques bidimensionnels. Dans le premier chapitre de cette partie, nous revenons sur cette origine historique, ce qui sera aussi l'occasion de détailler le problème à N corps en interaction de contact à la base de certains résultats obtenus pendant la thèse. Les chapitres suivants montrent comment cette équation est devenue la clé de voûte de différentes structures mathématiques et de différents points de vue constituant le domaine des systèmes intégrables.

I.1.1 Modèles de gaz imparfaits à basse température

Les modèles de gaz imparfaits correspondent à la tentative de décrire des gaz réels plus fidèlement que par le modèle de gaz parfait, c'est-à-dire en tenant compte le plus possible des interactions entre particules. En pratique, les modèles considérés correspondent à un système très dilué de particules dont le potentiel agit à distance finie. Le rayon d'action du potentiel d'interaction est bien inférieur à la distance entre les particules de sorte que les interactions n'apparaissent que lorsque les particules sont proches les unes des autres, ce qui réduit considérablement la probabilité d'interactions à plus de deux particules. En outre, à basse température, ou de façon équivalente à basse énergie, une particule est très étalée (sa longueur d'onde de de Broglie est grande) et par conséquent, la probabilité de trouver une particule à l'intérieur du rayon d'action du potentiel est infime. Il en résulte que le détail du potentiel d'interaction importe peu car une particule ainsi étalée ne subit que l'effet moyen du potentiel et en dehors d'une longueur caractéristique du potentiel, la *longueur de diffusion* a , tout se passe comme si les particules

étaient libres. Ainsi, pour un gaz imparfait à basse température, les particules se comportent comme des sphères dures de diamètre a .

Comme nous allons le voir, ce modèle physique est à l'origine de l'interaction de contact dont le potentiel est donnée par la distribution δ de Dirac. Nous donnerons aussi une présentation plus rigoureuse de ce potentiel avant de présenter la résolution complète du modèle à N corps correspondant.

L'idée de K. Huang et C. N. Yang [68] est d'utiliser la méthode des pseudo-potentiels pour produire un Hamiltonien effectif capable de reproduire fidèlement les niveaux de basse énergie du gaz imparfait. Nous allons présenter les grandes lignes du raisonnement pour deux particules, renvoyant le lecteur à [68] pour le détail des résultats généraux.

Soit \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 les vecteurs positions des deux particules dans \mathbb{R}^3 et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ décrivant les deux particules dans le référentiel du centre de masse prend la forme d'une équation aux valeurs propres pour le vecteur d'onde relatif \mathbf{k}

$$(\nabla^2 + \mathbf{k}^2)\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad r > a \quad (\text{I.1.1.1})$$

$$\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad r \leq a \quad (\text{I.1.1.2})$$

où r est la norme de \mathbf{r} .

Pour comprendre comment obtenir le pseudo-potentiel correspondant à ce problème, nous présentons la démarche pour la première harmonique de la fonction d'onde et à très basse énergie ($k \rightarrow 0$). Le problème devient

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 0 \quad , \quad r > a \quad (\text{I.1.1.3})$$

$$\psi(r) = 0 \quad , \quad r \leq a, \quad (\text{I.1.1.4})$$

avec pour solution

$$\psi(r) = \begin{cases} \alpha(1 - \frac{a}{r}) & , \quad r > a \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ 0 & , \quad r \leq a. \end{cases} \quad (\text{I.1.1.5})$$

L'idée maintenant est d'imaginer une fonction d'onde étendue ψ_e qui coïncide avec ψ pour $r > a$ et satisfait la même équation, mais qui est a priori non nulle à l'intérieur de la sphère dure

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_e(r) = 0 \quad , \quad r > 0 \quad (\text{I.1.1.6})$$

$$\psi_e(a) = 0 \quad . \quad (\text{I.1.1.7})$$

On cherche maintenant le pseudo-potentiel $V_p(\mathbf{r})$ de façon à pouvoir éviter d'imposer explicitement la condition en a et la restriction $r > 0$. Il faut donc étudier le comportement de ψ_e quand $r \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$. D'après (I.1.1.5), on obtient

$$\psi_e(r) = \alpha(1 - \frac{a}{r}) \quad , \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{I.1.1.8})$$

ce qui permet de caractériser la constante α , normalement définie par la condition aux limites en $r = +\infty$, par

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_e)|_{r=0}. \quad (\text{I.1.1.9})$$

La forme de ψ_e dans (I.1.1.8) code la condition $\psi_e(a) = 0$ et permet en outre d'écrire

$$\nabla^2 \psi_e(r) \rightarrow 4\pi a \delta(\mathbf{r}) \alpha, \quad r \rightarrow 0. \quad (\text{I.1.1.10})$$

On en déduit que, pour $k \rightarrow 0$, la fonction ψ_e satisfait l'équation suivante pour tout r

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_e(r) = 4\pi a \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_e)(r), \quad (\text{I.1.1.11})$$

et on a identifié le pseudo-potentiel comme étant l'opérateur $\delta(\mathbf{r})(\frac{\partial}{\partial r})r^1$. Par construction, pour $r \geq a$ et k petit, $\psi_e(r) = \psi(r)$: les deux fonctions satisfont la même équation et la même condition au bord et les énergies k^2 sont les mêmes. La question maintenant est d'étendre cette approche pour des valeurs quelconques de k .

Le résultat final de [68]² est que le pseudo-potentiel reproduisant la première harmonique de la fonction d'onde du gaz de sphères dures de masse m à toute énergie est de la forme³

$$V(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{km \cot(ka)} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r. \quad (\text{I.1.1.12})$$

En fait, à basse énergie, ce pseudo-potentiel est valable pour n'importe quel potentiel à distance finie dont les propriétés de diffusion sont caractérisées par a . C'est l'approximation d'indépendance de forme du potentiel (voir par exemple [67]). Dans ce cas, en négligeant les termes d'ordre k^2 dans le pseudo-potentiel pour k petit, on retrouve

$$V(\mathbf{r}) = \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r. \quad (\text{I.1.1.13})$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial r} r$ apparaît comme un "régulateur" à la limite $r \rightarrow 0$ dans cette approche des pseudo-potentiels. En effet, la fonction d'onde étendue du problème avec le pseudo-potentiel, ψ_e , ne coïncide avec la fonction d'onde du problème initial que pour $r \geq a$ mais est définie en pratique pour tout r . Ainsi, elle décrit de façon artificielle ce qui se passe à l'intérieur de la sphère dure et il se trouve qu'elle a un comportement divergent quand $r \rightarrow 0$ du type (I.1.1.8) qui est régulé par $\frac{\partial}{\partial r} r$ comme le montre (I.1.1.9).

1. Ce raisonnement est dû à J.M. Blatt et V.F. Weisskopf [13]

2. Notons que dans cet article, le pseudo-potentiel pour toutes les harmoniques supérieures à toute énergie est également déterminé.

3. Nous avons réintroduit temporairement les constantes \hbar et m .

En revanche, pour une fonction régulière en $r = 0$ (ce qui sera le cas des fonctions d'onde non perturbées du problème libre), cet opérateur est représenté par l'identité.

L'Hamiltonien à N particules correspondant prend la forme

$$H_{pseudo} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \frac{\partial}{\partial r_{ij}} r_{ij}. \quad (\text{I.1.1.14})$$

La motivation physique de cette approche est d'utiliser le pseudo-potentiel comme une perturbation de l'Hamiltonien libre correspondant au gaz parfait. Dans cette optique, cette perturbation est appliquée sur les fonctions d'onde non perturbées de l'Hamiltonien libre afin de trouver les corrections en énergie dues aux interactions entre particules ainsi modélisées. D'après la discussion précédente sur le rôle de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial r} r$, on en déduit qu'en pratique, le fameux potentiel δ sera utilisé.

Nous avons présenté la situation en trois dimensions et la constante de couplage de l'interaction est dans ce cas

$$g_{3D} = \frac{2\pi a \hbar^2}{m}, \quad (\text{I.1.1.15})$$

donnant lieu au potentiel de contact à deux corps suivant

$$2g_{3D} \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (\text{I.1.1.16})$$

La situation peut être adaptée à une dimension, constituant le modèle d'interaction de contact unidimensionnel à la base de notre présentation. La constante de couplage dans ce cas sera simplement notée g . Il est intéressant de constater que son expression explicite en fonction d'une longueur de diffusion caractéristique du problème unidimensionnel n'a été étudiée que très récemment [100] dans le contexte d'un gaz atomique confiné dans un piège de forme allongée reproduisant une situation unidimensionnelle. Le résultat fondamental de [100] est qu'il est possible de modéliser une situation expérimentale confinant un gaz de bosons à une dimension par une interaction $\delta(z)$ où z est la coordonnée selon l'axe longitudinal du piège (optique ou magnétique) dont la constante de couplage g prend en compte les effets des modes transverses du système.

Dès lors, nous pouvons conclure cette introduction des motivations physiques de l'interaction δ par cette note optimiste : il est maintenant possible de réaliser expérimentalement des situations correspondant à des modèles exactement résolubles qui furent tout d'abord étudiés pour leur seul intérêt théorique et mathématique. Les effets de la modélisation sont contenus dans la constante de couplage qui intervient dans la résolution théorique du modèle de E. Lieb et W. Liniger [82] qui sera présenté au paragraphe I.1.3.

I.1.2 Description mathématique

Nous nous proposons ici de revenir un peu plus en détail sur la définition rigoureuse du potentiel δ apparaissant dans l'Hamiltonien du système quantique que l'on veut étudier. Dans toute la suite du manuscrit, nous prendrons des unités telles que $\hbar = 1$ et $2m = 1$.

I.1.2.1 Extensions auto-adjointes

La présentation historique du paragraphe précédent s'inscrit dans une logique pragmatique d'abord motivée par la physique puis relayée par les mathématiques. En effet, l'idée sous-jacente dans l'approche des pseudo-potentiels est de simplifier au maximum d'un point de vue mathématique un modèle physique donné tout en conservant un maximum de ses propriétés. Dans l'exemple qui nous occupe, on veut pouvoir avoir recours à un modèle d'interaction suffisamment idéalisé pour permettre une résolution exacte (on parle de modèles exactement résolubles) mais conservant tout de même les propriétés de diffusion des particules du système physique de départ. Dans ce contexte, les interactions dites ponctuelles, ou de contact, (voir [6] pour une présentation très complète) et leurs généralisations initiées dans la littérature russe (voir par exemple [116]) ont reçu une attention particulière des mathématiciens. Le prototype de tels modèles correspondant à l'opérateur Hamiltonien suivant

$$H = -\nabla^2 + g\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{I.1.2.17})$$

a été défini rigoureusement comme une extension auto-adjointe de l'opérateur $-\nabla^2$ agissant sur le domaine des fonctions C^∞ à support compact en dehors du centre d'interaction [10]. Comme nous allons le voir, lorsqu'on se restreint à une dimension spatiale l'interaction δ fait partie d'une famille d'extensions auto-adjointes de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ décrite par quatre paramètres réels. Nous avons besoin tout d'abord de quelques définitions mathématiques issues de la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert (voir par exemple [110, 111]). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert (séparable) muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et A un opérateur agissant sur \mathcal{H} défini sur son domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$. En toute généralité, A peut être non borné et dans ce cas la spécification du domaine est indispensable ; on notera l'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$.

- $(A, \mathcal{D}(A))$ est dit *dense* si $\mathcal{D}(A)$ est dense dans \mathcal{H} .
- $(B, \mathcal{D}(B))$ est une *extension* de $(A, \mathcal{D}(A))$, notée $A \subset B$, si et seulement si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $\forall f \in \mathcal{D}(A), Bf = Af$.
- $(A, \mathcal{D}(A))$ est dit *fermé* si $\mathcal{D}(A)$ est fermé et si, étant donnée une suite (ϕ_n) dans $\mathcal{D}(A)$ convergeant vers ϕ ,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A\phi_n = \psi \right) \Rightarrow (A\phi = \psi) . \quad (\text{I.1.2.18})$$

La *fermeture* de $(A, \mathcal{D}(A))$ est la plus petite extension fermée de $(A, \mathcal{D}(A))$, notée $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A}))$.

- *L'adjoint* $(B, \mathcal{D}(B))$ de $(A, \mathcal{D}(A))$ est l'opérateur défini comme suit :
 - i) $\mathcal{D}(B)$ est l'ensemble des éléments $\psi \in \mathcal{H}$ tels que la forme linéaire $\phi \mapsto \langle \psi, A\phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{D}(A)$, soit continue pour la topologie de \mathcal{H} définie par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dans ce cas, le théorème de Riesz nous assure qu'il existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tel que $\langle \varphi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$.
 - ii) B est alors défini sur $\mathcal{D}(B)$ par $B\psi = \varphi$ et on le note $B = A^\dagger$. En particulier, on a l'écriture habituelle $\forall \psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(A)$, $\langle A^\dagger \psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$.
- $(A, \mathcal{D}(A))$ est dit *symétrique* si et seulement si $A \subset A^\dagger$. Autrement dit, $(A, \mathcal{D}(A))$ est *symétrique* si et seulement si $\forall \psi, \phi \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle.$$

- $(A, \mathcal{D}(A))$ est dit *auto-adjoint* si et seulement si $A = A^\dagger$.

Pour ce qui nous intéresse, considérons un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ dense et symétrique. Sa fermeture $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A}))$ existe et il y a deux possibilités : soit $\overline{A} = A^\dagger$ et l'opérateur est dit *essentiellement auto-adjoint* (avec comme cas particulier $\overline{A} = A$ pour lequel A est en fait auto-adjoint), soit $\overline{A} \neq A^\dagger$ avec les relations d'inclusion $A \subset \overline{A} \subset A^\dagger$. Dans ce cas, on peut alors se demander s'il est possible de trouver une extension de $(\overline{A}, \mathcal{D}(\overline{A}))$ qui soit auto-adjointe. Et si oui, cette extension est-elle unique? La réponse à ce problème a été apportée par von Neumann [126] dans sa théorie des extensions auto-adjointes des opérateurs symétriques. Soit $(A^\dagger, \mathcal{D}(A^\dagger))$ l'adjoint de $(A, \mathcal{D}(A))$. On définit les sous-espaces de déficience $\mathcal{N}_\pm \in \mathcal{H}$ par (I étant l'opérateur identité)

$$\mathcal{N}_\pm = \text{Ker}(A^\dagger \mp i\lambda^2 I) \quad , \quad \lambda > 0, \quad (\text{I.1.2.19})$$

et les indices de déficience n_\pm par $n_\pm = \dim \mathcal{N}_\pm$. Dans les cas qui nous intéressent, les indices sont finis et on a le résultat suivant

Théorème I.1.2.1 *Les extensions auto-adjointes de $(A, \mathcal{D}(A))$ sont en bijection avec les applications unitaires de \mathcal{N}_+ sur \mathcal{N}_- . Ainsi, trois cas se présentent :*

- si $n_+ \neq n_-$ alors A n'a pas d'extensions auto-adjointes.
- si $n_+ = n_- = 0$ alors A a exactement une extension auto-adjointe. Soit $A = A^\dagger$ et A est alors auto-adjoint ou bien $A \neq A^\dagger$ et A est alors essentiellement auto-adjoint.
- si $n_+ = n_- = N$, il existe une infinité d'extensions auto-adjointes de A paramétrées par les matrices unitaires $N \times N$. En pratique, les

domaines \mathcal{D}_U de ces extensions sont construits à partir de $\mathcal{D}(A)$ pour chaque application $U : \mathcal{N}_+ \rightarrow \mathcal{N}_-$

$$\mathcal{D}_U = \{\tilde{\phi} = \phi + \alpha_+ \chi_+ + \alpha_- \chi_- \mid \phi \in \mathcal{D}(A), \chi_{\pm} \in \mathcal{N}_{\pm}, \alpha_{\pm} \in \mathbb{C}\}$$

L'utilisation pratique de ce théorème pour les opérateurs différentiels requiert encore plusieurs étapes. Il faut trouver un domaine pour lequel l'opérateur formellement auto-adjoint en question est dense, symétrique et fermé. Par formellement auto-adjoint, on comprend que la forme explicite de l'opérateur est la même que celle de son adjoint sans considération précise des domaines respectifs. Puis, il faut déterminer son adjoint (c'est-à-dire en fait le domaine de l'adjoint) et calculer les indices de déficience. Et enfin, le cas échéant, il faut décrire les domaines des extensions auto-adjointes données par le théorème.

On s'intéresse tant aux opérateurs auto-adjoints en raison du *théorème spectral* qui assure la diagonalisation (avec des valeurs propres réelles) et l'existence d'une base de vecteurs propres (que l'on peut orthonormer), fondements de la mécanique quantique. Dans le cadre de cette théorie, un opérateur de prédilection est l'opérateur Hamiltonien. Souvent, l'Hamiltonien est défini au départ comme un opérateur différentiel formellement auto-adjoint pour le produit scalaire de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ par exemple pour un problème en d dimensions. Mais cela ne définit pas un opérateur sur \mathcal{H} à proprement parler puisque \mathcal{H} contient des fonctions qui ne sont pas continues, sans parler de dérivables.

La première étape est donc de chercher un domaine \mathcal{D} dense dans \mathcal{H} sur lequel l'Hamiltonien formel est bien défini comme opérateur linéaire H . Souvent, \mathcal{D} est l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^d . Si l'Hamiltonien présente des singularités localisées en certains points (ce sera notre cas), on prend alors l'espace des fonctions à support compact ne contenant pas ces points. Ainsi en choisissant bien \mathcal{D} , l'opérateur formellement auto-adjoint devient un opérateur symétrique et dense sur \mathcal{D} . Dès lors, on peut utiliser l'artillerie qui vient d'être présentée pour construire les extensions auto-adjointes de H le cas échéant.

Il est temps de passer à l'exemple qui nous intéresse à savoir l'étude des extensions auto-adjointes de l'opérateur différentiel $-\frac{d^2}{dx^2}$. Rappelons que notre point de départ est de donner un sens rigoureux à l'Hamiltonien défini par (I.1.2.17) dans le cadre d'une théorie unidimensionnelle. Il est clair que sur $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, l'opérateur $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ et la version à une dimension de l'opérateur (I.1.2.17) coïncident. En outre, une simple intégration par parties montre que H_0 est symétrique sur \mathcal{D} muni du produit scalaire habituel de $L^2(\mathbb{R})$ (pour la mesure standard notée dx):

$$\forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi^*(x) \psi(x) dx \quad (\text{I.1.2.20})$$

Pour l'instant, on dispose donc d'un opérateur différentiel dense et symétrique. Il nous faut maintenant trouver sa fermeture et cela nécessite le recours à un espace de Sobolev. De manière générale, pour un ouvert Ω de \mathbb{R} ,

un entier naturel s et un réel $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{s,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall r \leq s, f^{(r)} \in L^p(\Omega)\} \quad (\text{I.1.2.21})$$

$f^{(r)}$ étant la dérivée r -ième de f . Il est possible de donner une structure d'espace de Banach à $W^{s,p}(\Omega)$ et pour $p = 2$, cette structure peut même être promue en espace de Hilbert. Comme l'opérateur différentiel qui nous intéresse est d'ordre 2 et qu'on travaille dans $L^2(\mathbb{R})$, l'espace de Sobolev requis est $W^{2,2}(\mathbb{R})$. En effet, la fermeture de H_0 est définie sur le domaine $\overline{\mathcal{D}}$ des fonctions ψ de $W^{2,2}(\mathbb{R})$ telles que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ [5].

L'adjoint de H_0 est quant à lui défini sur $W^{2,2}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, [5], et on utilise le théorème de von Neumann. On cherche les solutions de l'équation

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) = i\lambda^2 f(x) \quad , \quad \lambda > 0. \quad (\text{I.1.2.22})$$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle admet deux racines distinctes $\lambda_{\pm} = \pm(\frac{i-1}{\sqrt{2}})\lambda$. Ainsi, l'indice de déficience n_+ est égal à 2 et les fonctions de base de \mathcal{N}_+ sont de la forme

$$f_+(\lambda_+, x) = \theta(x)e^{\lambda_+ x} \quad , \quad f_-(\lambda_-, x) = \theta(-x)e^{\lambda_- x} \quad (\text{I.1.2.23})$$

θ étant la fonction de Heaviside. On a les mêmes conclusions pour \mathcal{N}_- en remplaçant λ_{\pm} par son conjugué λ_{\pm}^* . Ainsi, les indices de déficience sont (2,2) et on conclut qu'il y a une infinité d'extension auto-adjointes de H_0 sur $C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ paramétrées par les matrices U de $U(2)$. Ces extensions sont données par les restrictions de H_0^\dagger agissant sur les domaines \mathcal{D}_U de la forme

$$\mathcal{D}_U = \{\psi = \overline{\psi} + A_+ f_+(\lambda_+, x) + A_- f_-(\lambda_-, x) + B_+ f_+(\lambda_+^*, x) + B_- f_-(\lambda_-^*, x) \mid \\ \overline{\psi} \in \overline{\mathcal{D}} \quad , \quad \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}\} \quad (\text{I.1.2.24})$$

I.1.2.2 Conditions aux bords

La caractérisation précédente des extensions auto-adjointes de l'Hamiltonien libre sur $C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ n'est pas très pratique d'utilisation dans le contexte de la mécanique quantique où l'on préfère avoir un problème différentiel avec des conditions aux bords pour la fonction d'onde. C'est pourquoi on cherche à caractériser le domaine \mathcal{D}_U par des conditions en $x = 0$ sur ses éléments. L'argument traditionnel s'appuie sur la forme sesquilineaire suivante

$$F_U(\phi, \psi) = \langle H_0^\dagger \phi, \psi \rangle - \langle \phi, H_0^\dagger \psi \rangle \quad , \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}_U. \quad (\text{I.1.2.25})$$

Une simple intégration par parties montre qu'elle ne dépend que des valeurs prises par ψ et ϕ en 0^+ et 0^- . En outre, comme H_0^\dagger est auto-adjoint sur \mathcal{D}_U , F_U est nulle et en particulier, pour $\psi = \phi$, on trouve

$$F_U(\phi, \phi) = 0 = (\phi^*)'(0^+) \phi(0^+) - \phi^*(0^+) \phi'(0^+) \\ - (\phi^*)'(0^-) \phi(0^-) + \phi^*(0^-) \phi'(0^-). \quad (\text{I.1.2.26})$$

Soit alors v_{\pm} les vecteurs de \mathbb{C}^2 définis par

$$v_{\pm} = \begin{pmatrix} \phi(0^+) \pm iL_0\phi'(0^+) \\ \phi(0^-) \mp iL_0\phi'(0^-) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.2.27})$$

où on a introduit la longueur L_0 par homogénéité. On a alors l'équivalence

$$F_U(\phi, \phi) = 0 \Leftrightarrow \|v_+\| = \|v_-\|. \quad (\text{I.1.2.28})$$

Or l'égalité du membre de droite est à son tour équivalente à l'existence d'une matrice V dans $U(2)$ telle que $v_- = Vv_+$. Enfin, la définition (I.1.2.24) implique que $V = U$. Ainsi, les extensions auto-adjointes de $(H_0, C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ sont définies sur l'ensemble des fonctions $\phi \in W^{2,2}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ satisfaisant les conditions aux bords suivantes

$$(U - \mathbb{I}) \begin{pmatrix} \phi(0^+) \\ \phi(0^-) \end{pmatrix} + iL_0(U + \mathbb{I}) \begin{pmatrix} \phi'(0^+) \\ -\phi'(0^-) \end{pmatrix} = 0, \quad U \in U(2), \quad (\text{I.1.2.29})$$

Il y a quatre paramètres réels contrôlant ces extensions correspondant à $U(2)$ et il est montré dans [26] que la longueur L_0 n'ajoute pas de degré de liberté dans les conditions aux bords. On la prendra égale à 1 dans toute la suite.

Il reste maintenant à faire le lien avec notre problème de départ concernant la version à une dimension de l'Hamiltonien (I.1.2.17). Cette étape est très technique également et nous nous appuyons encore sur [5] et renvoyons à [78] pour les détails. Le résultat final est que l'expression suivante (formelle) pour le potentiel singulier généralisant le potentiel δ ,

$$2g\delta(x) + 2\lambda \frac{d}{dx}\delta(x) \frac{d}{dx} + 2(\mu + i\nu) \frac{d}{dx}\delta(x) - 2(\mu - i\nu)\delta(x) \frac{d}{dx}, \quad (\text{I.1.2.30})$$

correspond aux conditions aux bords (I.1.2.29), avec une condition appropriée sur U (voir par exemple l'article [VIII]), que l'on peut réécrire,

$$\begin{pmatrix} \phi(0^+) \\ \phi'(0^+) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(0^-) \\ \phi'(0^-) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.2.31})$$

pour $\lambda g - \mu^2 + (1 - i\nu)^2 \neq 0$ et avec $\alpha\alpha^* = 1$, $ad - bc = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. L'identification s'écrit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\Delta(\lambda g - \mu^2 + (1 - i\nu)^2)}, \\ a &= ((1 + \mu)^2 + \nu^2 - \lambda g)\Delta, \quad b = 2\lambda\Delta, \\ c &= 2g\Delta, \quad d = ((1 + \mu)^2 + \nu^2 - \lambda g)\Delta, \end{aligned}$$

où $\Delta = |\lambda g - \mu^2 + (1 + i\nu)^2|^{-1}$. Le cas $\lambda g - \mu^2 + (1 - i\nu)^2 = 0$ correspond à des conditions au bord *séparées* [5] que nous ne considérons pas mais qui peuvent de toute façon être retrouvées comme certaines limites du paramétrage (I.1.2.31).

Terminons ce paragraphe sur une élégante interprétation physique de la condition (I.1.2.26). Etant donnée la fonction d'onde (scalaire) ϕ d'un problème de mécanique quantique, on définit la densité de probabilité de courant $j(x)$ correspondante par

$$j(x) = -i((\phi^*)'\phi - \phi^*\phi')(x). \quad (\text{I.1.2.32})$$

Alors, pour le problème décrit par une des extensions auto-adjointes sur \mathcal{D}_U , (I.1.2.26) montre que j est continue à travers le potentiel ponctuel en $x = 0$ décrit par les conditions aux bords (I.1.2.29). La densité de probabilité de courant est conservée : le potentiel n'est pas dissipatif.

I.1.3 Interaction de contact dans le problème à N corps

I.1.3.1 Le gaz de bosons

Dans ce paragraphe, nous entrons réellement dans le vif du sujet en combinant les motivations physiques du paragraphe I.1.1 et les résultats mathématiques du paragraphe I.1.2. L'objectif est de décrire un gaz imparfait de bosons à une dimension par l'Hamiltonien à N particules introduit par E. Lieb et W. Liniger [82] et quasiment simultanément par J.B McGuire dans [88]. Ce modèle, et sa généralisation par C.N. Yang, est un système exactement résoluble et sera utilisé dans ce manuscrit pour présenter certains concepts fondateurs des systèmes intégrables modernes comme *l'ansatz de Bethe* et *l'équation de Yang-Baxter*. Par souci de concision, on ne présentera pas la notion de limite thermodynamique accompagnant très souvent l'ansatz de Bethe car elle n'est pas nécessaire à la présentation des travaux effectués pendant la thèse. Le lecteur curieux pourra toujours se référer aux articles originaux [82, 128] qui détaillent cette technique afin de trouver les propriétés thermodynamiques du gaz considéré.

Le point de départ est l'équation de Schrödinger stationnaire pour N particules repérées par x_1, \dots, x_N et interagissant via un potentiel δ sur un cercle de circonférence L :

$$\left(-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2g \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \right) \psi = E\psi, \quad 0 \leq x_i \leq L, \quad (\text{I.1.3.33})$$

g étant la constante de couplage de l'interaction et ψ la fonction d'onde à N particules satisfaisant des conditions périodiques, complètement symétrique pour des bosons. Pour un potentiel répulsif, g est positive et il n'y a pas d'états liés. Le cas attractif a été discuté dans [88]. Le potentiel δ est un cas particulier des extensions auto-adjointes discutées dans la section précédente correspondant à $\alpha = a = d = 1$, $b = 0$ et $c = 2g$ dans (I.1.2.31). L'action

du potentiel δ sur la fonction d'onde est donc caractérisée par les conditions aux bords suivantes

$$\psi_{|x_i=x_j^+} = \psi_{|x_i=x_j^-}, \quad (\text{I.1.3.34})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_{|x_i=x_j^+} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_{|x_i=x_j^-} + 2g\psi_{|x_i=x_j}. \quad (\text{I.1.3.35})$$

La fonction d'onde est continue sur chaque hyperplan $x_i = x_j$ de \mathbb{R}^N mais sa dérivée y fait un "saut" proportionnel à la valeur de la fonction d'onde sur cet hyperplan. Comme la fonction d'onde est complètement symétrique, il suffit de la connaître dans la région $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq L$ pour la caractériser entièrement. Le problème à résoudre finalement prend la forme

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi = E\psi, \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < L, \quad (\text{I.1.3.36})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi_{|x_{j+1}=x_j} = g\psi_{|x_{j+1}=x_j}, \quad (\text{I.1.3.37})$$

avec la condition de périodicité devenant

$$\psi(0, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_2, \dots, x_N, L), \quad (\text{I.1.3.38})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, x_2, \dots, x_N)_{|x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x_2, \dots, x_N, x)_{|x=L}. \quad (\text{I.1.3.39})$$

L'idée maintenant est de formuler une hypothèse pour la forme de la fonction d'onde. Soit \mathfrak{S}_N le groupe des permutations de N éléments. Il est composé de $N!$ éléments engendrés par $N-1$ générateurs T_i , $i = 1, \dots, N-1$ et l'identité **1**. On rappelle ses relations de définition

$$T_i T_i = \mathbf{1}, \quad (\text{I.1.3.40})$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad (\text{I.1.3.41})$$

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad |i-j| > 1. \quad (\text{I.1.3.42})$$

Soient (k_1, \dots, k_N) N réels ordonnés (ces nombres vont caractériser les fonctions d'onde propres du problème). L'action de $P \in \mathfrak{S}_N$ sur (k_1, \dots, k_N) est donnée par $P(k_j) = k_{Pj}$, Pj étant l'image de $j \in \{1, \dots, N\}$ par la permutation P . Dans la région $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq L$, on suppose que la fonction d'onde s'écrit

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} A_P e^{ik_{P1}x_1 + \dots + ik_{PN}x_N}. \quad (\text{I.1.3.43})$$

C'est le célèbre *ansatz de Bethe* du nom de Hans Bethe⁴ qui en fit l'usage pour la première fois en 1931 [12] pour résoudre la chaîne de spin proposée

4. "The Last of the old Masters of Physics". Hans Bethe, Prix nobel de Physique 1967, est mort le 6 mars 2005 à l'âge de 98 ans.

par Heisenberg [65]. Les coefficients A_P sont les amplitudes inconnues à déterminer pour que la fonction d'onde soit la solution recherchée. C'est une généralisation de la fonction d'onde (à une composante) pour des fermions où les coefficients seraient simplement $(-)^P$, c'est-à-dire la signature de la permutation P .

Le but de l'ansatz de Bethe étant de résoudre le problème considéré, il y a plusieurs étapes à valider :

- (i) Trouver les coefficients A_P qui déterminent les états propres stationnaires.
- (ii) Trouver le spectre d'énergie correspondant.
- (iii) S'assurer que l'hypothèse est justifiée. En d'autres termes, vérifier que les fonctions propres identifiées par l'ansatz forment une base de solutions. On est alors assuré d'avoir identifié tout le spectre d'énergie. Il faut aussi confirmer que les k_j sont bien N réels distincts et étudier le cas échéant d'éventuelles extensions au plan complexe (pour prendre en compte la possibilité d'états liés).

La dernière étape (iii) est souvent la plus ardue et il n'est pas rare qu'elle soit très sommairement vérifiée voire pas du tout. Il faut alors bien être conscient que l'ansatz de Bethe reste une hypothèse et que les solutions trouvées ne décrivent peut-être pas tout le spectre. En revanche, si l'on parvient à prouver la validité de l'ansatz de Bethe (dans le sens où elle produit bien tous les états propres du système), on peut alors dire que le système est complètement résolu : on a identifié tous ses états propres et ses états d'énergie. Il est alors possible de l'étudier à température finie et de s'intéresser à ses propriétés thermodynamiques.

Dans le cas présent, la première étape (i) est déterminée par les conditions (I.1.3.37) que la fonction d'onde doit satisfaire sur les hyperplans $x_{i+1} = x_i$. Considérons le cas $x_1 = x_2$. Les k_i étant supposés différents, les $N!$ termes de la somme dans (I.1.3.43) sont indépendants et dans la limite $x_1 = x_2$, la condition (I.1.3.37) relie les permutations deux à deux de la façon suivante : si P_{12} est la permutation échangeant les deux premiers éléments et laissant les autres inchangés, alors seules $Q \in \mathfrak{S}_N$ et QP_{12} interviennent dans (I.1.3.37). On obtient les conditions suivantes :

$$A_Q = -A_{QP_{12}} \frac{g - i(k_{Q1} - k_{Q2})}{g + i(k_{Q1} - k_{Q2})}. \quad (\text{I.1.3.44})$$

Ainsi, les deux amplitudes correspondant à l'échange des deux nombres k_{Q1} et k_{Q2} sont reliées par une *phase* qui dépend de la constante de couplage de l'interaction et de k_{Q1} et k_{Q2} . Cette phase représente l'action de l'interaction δ sur la fonction d'onde dans l'espace de Fourier. On introduit $\omega_{ij} = \omega(k_i - k_j)$

avec

$$\omega(u) = -2 \arctan \left(\frac{u}{g} \right), \quad (\text{I.1.3.45})$$

et pour u réel on a,

$$-\pi \leq \omega(u) \leq \pi.$$

Alors la phase dans (I.1.3.44) prend la forme $e^{i\omega_{Q^1Q^2}}$. A partir de là, on voit qu'on peut satisfaire aux $N - 1$ possibilités $x_i = x_{i+1}$ en exprimant chaque A_P en fonction de A_I par exemple par itération de la relation (I.1.3.44). En effet, toute permutation $P \in \mathfrak{S}_N$ peut être décomposée en une succession de transpositions échangeant i et j , chacune donnant lieu à un facteur $-e^{i\omega_{ij}}$. A_P est donc tout simplement le produit de ces facteurs multiplié par A_I . La normalisation de la fonction d'onde finit de fixer tous les coefficients en imposant la valeur de A_I . Cependant, une telle décomposition n'est pas unique en général et on peut se demander si cette construction est cohérente c'est-à-dire si A_P est bien défini sans ambiguïté. Il est facile de voir à partir de l'exemple suivant que toute décomposition en transposition d'une même permutation P donne le même facteur A_P . Si

$$P = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.3.46})$$

alors il existe deux décompositions : $(123) \rightarrow (213) \rightarrow (231) \rightarrow (321)$ et $(123) \rightarrow (132) \rightarrow (312) \rightarrow (321)$, qui donnent toutes les deux la phase $-e^{i(\omega_{21} + \omega_{31} + \omega_{32})}$. De façon générale, la validité de la construction tient au fait que les phases ω_{ij} fournissent une représentation (de dimension 1) de \mathfrak{S}_N .

Il est facile de voir que l'équation aux valeurs propres (I.1.3.36) est également satisfaite avec

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2. \quad (\text{I.1.3.47})$$

On en déduit que la fonction d'onde ψ définie par (I.1.3.43) est solution du problème (I.1.3.36, I.1.3.37) lorsque les amplitudes A_P satisfont les conditions décrites précédemment. Remarquons que l'hypothèse sur les k_j , qui doivent être distincts deux à deux, assure que la fonction d'onde ψ n'est pas identiquement nulle. En fait, les valeurs pouvant être prises par les k_j vont être contraintes par la condition de périodicité (I.1.3.38, I.1.3.39) et il ressort que la quantité $k_{j+1} - k_j$ n'est pas nulle [82]. Cela fixe par la même occasion le spectre en énergie d'après (I.1.3.47) et permet de passer à l'étape (ii) de la méthode. Les propriétés des amplitudes A_P déjà utilisées précédemment montrent que les conditions de périodicité sont équivalentes à N équations pour les N nombres k_j ,

$$e^{ik_j L} = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^N (-e^{i\omega_{js}}). \quad (\text{I.1.3.48})$$

Ce sont les *equations de Bethe* : elles déterminent les valeurs possibles des k_j et donc aussi le spectre d'énergie. Elles sont extrêmement difficiles à résoudre analytiquement en général mais on peut tout de même en tirer de précieuses informations (notamment en prenant la limite thermodynamique). Dans [82], des arguments sont donnés pour soutenir l'hypothèse que tous les k_j sont réels dans le cas répulsif. Soulignons que le cas attractif est beaucoup moins évident car la présence d'états liés à deux, trois voire N particules, vient enrichir la discussion. Quoiqu'il en soit, disposant de N k_j distincts ainsi déterminés, le choix suivant pour la fonction d'onde s'est imposée historiquement, pour $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq L$,

$$\psi_{BA}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} \sum_{j < \ell} \frac{g - i(k_{Pj} - k_{P\ell})}{i(k_{Pj} - k_{P\ell})} e^{i(k_{P1}x_1 + \dots + k_{PN}x_N)} \quad (\text{I.1.3.49})$$

Ces solutions, que l'on nomme *fonctions d'onde de l'ansatz de Bethe* ne sont pas normalisées à la fonction δ (sauf pour $g = 0$) mais ont l'avantage de tendre continûment vers les ondes planes solutions du problème libre pour $g \rightarrow 0$. En se servant de cette forme explicite, on peut montrer que pour $g \geq 0$, ces solutions forment une base complète de solutions alors que pour $g < 0$, elles engendrent un sous-espace fermé correspondant au spectre continu de l'Hamiltonien (voir par exemple [54]).

Supposons maintenant par exemple que $k_1 < k_2 < \dots < k_N$. Le produit terme à terme des N équations de Bethe implique

$$e^{i \sum_{j=1}^N k_j L} = 1, \quad (\text{I.1.3.50})$$

d'où on déduit qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sum_{j=1}^N k_j = \frac{2\pi n}{L}. \quad (\text{I.1.3.51})$$

Ainsi, l'impulsion totale p est un multiple de $2\pi/L$ et on retrouve le résultat attendu de la quantification de l'impulsion due au fait qu'on "enferme" les particules sur un segment de taille L . En outre, étant donné un entier n_0 quelconque, on voit que $k'_j = k_j + 2\pi n_0/L$ est encore solution des équations de Bethe et définit un nouvel état quantique d'impulsion totale $p' = p + 2\pi n_0 \rho$ où $\rho = N/L$ est la densité. Si E est l'énergie de l'état initial, la nouvelle énergie est

$$E' = \sum_{j=1}^N k_j'^2 = E + \frac{4\pi n_0 \rho}{L} p + \frac{(2\pi n_0 \rho)^2}{N}, \quad (\text{I.1.3.52})$$

en accord avec le résultat d'une transformation galiléenne. Ainsi, on peut voir le nouvel état comme *globalement* translaté par rapport à l'état initial tandis que son état *interne* reste inchangé (tous les k_j sont translatés d'une

même quantité). L'entier n_0 est donc un des nombres quantiques décrivant un état. En utilisant ce nombre, on peut toujours se ramener à un état dont l'impulsion totale p est dans l'intervalle $]-\pi\rho, \pi\rho]$ et il suffit donc d'étudier ces états. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [82] pour la suite de la discussion et le passage à la limite thermodynamique. Le problème de la validité de l'ansatz sera discuté dans le paragraphe suivant traitant du cas général.

I.1.3.2 Généralisation de la statistique

L'étude précédente concernait un gaz de particules de type bosonique et on peut se demander si cette étude peut être étendue à un système de particules quelconques. Dans [128], C.N. Yang considère le même problème mais sans aucune restriction sur la symétrie de la fonction d'onde. Cela permet d'imaginer un gaz de particules ayant un spin quelconque, chaque particule étant dans un état de spin quelconque. Etant donnée une représentation du groupe des permutations agissant sur les coordonnées x_i , la fonction d'onde ψ se transforme selon cette représentation. Partant de là, l'ansatz de Bethe est appliqué de la même façon que précédemment sans tenir compte a priori de la symétrie de la fonction d'onde. Il faut donc considérer toutes les régions possibles du type $0 \leq x_{Q1} \leq x_{Q2} \leq \dots \leq x_{QN} \leq L$, $Q \in \mathfrak{S}_N$ et formuler une hypothèse sur la forme de la fonction d'onde dans chaque région :

$$\psi_Q = \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} A_P(Q) e^{ik_{P1}x_{Q1} + \dots + ik_{PN}x_{QN}}. \quad (\text{I.1.3.53})$$

Les conditions de continuité et de saut pour la dérivée (I.1.3.34, I.1.3.35) sont à prendre sur chaque hyperplan $x_{Qa} = x_{Qa+1}$ pour $Q \in \mathfrak{S}_N$. Soient $P, P', Q' \in \mathfrak{S}_N$ tels que

$$\begin{cases} Qj = Q'j \text{ et } Pj = P'j \text{ pour } j \neq a, a+1, \\ Qa = Q'(a+1) \text{ , } Pa = P'(a+1). \end{cases} \quad (\text{I.1.3.54})$$

On obtient

$$A_{P'}(Q') = \frac{k_{Pa} - k_{Pa+1}}{k_{Pa} - k_{Pa+1} - ig} A_P(Q) + \frac{ig}{k_{Pa} - k_{Pa+1} - ig} A_P(Q'). \quad (\text{I.1.3.55})$$

L'idée est alors de ranger tous les coefficients $A_P(Q)$ dans une matrice $N! \times N!$ dont les vecteurs colonnes contiennent les $A_P(Q)$ pour P fixé et Q parcourant \mathfrak{S}_N et sont notés \mathcal{A}_P . Soit alors $T_{a,a+1}$ l'opérateur permutation agissant sur \mathcal{A}_P et correspondant à l'échange entre x_{Qa} et x_{Qa+1} c'est-à-dire permutant $A_P(Q)$ et $A_P(Q')$ dans \mathcal{A}_P . On a $T_{a,a+1}T_{a+1,a} = T_{a,a+1}T_{a,a+1} = \mathbb{I}$. On notera dans la suite tout simplement T_a . Les relations (I.1.3.55) sont équivalentes aux relations suivantes

$$\mathcal{A}_{P'} = Y_{a,a+1}(k_{Pa} - k_{Pa+1})\mathcal{A}_P, \quad (\text{I.1.3.56})$$

où la matrice de Yang $Y_{a,a+1}(u)$ est donnée par

$$Y_{a,a+1}(u) = \frac{uT_a - ig}{u + ig}. \quad (\text{I.1.3.57})$$

C'est la généralisation matricielle de la phase qui apparaît dans (I.1.3.44). La suite de l'ansatz suit les mêmes étapes. Il faut s'assurer que l'on peut déterminer toutes les amplitudes $A_P(Q)$ de façon cohérente grâce à (I.1.3.56). C'est en effet possible grâce aux propriétés vérifiées par les matrices Y_{ab} où on a défini l'opérateur T_{ab} , $a < b$ de "proche en proche" par

$$T_{ab} = T_{b-1} \dots T_a \dots T_{b-1}. \quad (\text{I.1.3.58})$$

L'opérateur T_{ab} échange a et b et fournit une représentation de l'opérateur permutation correspondant *i.e.* la transposition (ab) . On a alors

$$Y_{ab}(u)Y_{ba}(-u) = \mathbb{I} \quad (\text{I.1.3.59})$$

$$Y_{ab}(u)Y_{bc}(u+v)Y_{ab}(v) = Y_{bc}(v)Y_{ab}(u+v)Y_{bc}(u) \quad (\text{I.1.3.60})$$

La relation (I.1.3.59) sera appelée *relation d'unitarité* dans la suite pour des raisons qui deviendront évidentes. L'équation (I.1.3.60) est la version dite tressée de la célèbre *équation de Yang-Baxter* pour laquelle Yang a fourni une solution grâce au modèle que nous sommes en train de détailler. Tout comme dans le cas précédent tout cela est valable pour des k_j distincts deux à deux afin que la fonction d'onde ne soit pas identiquement nulle.

On peut alors passer à l'étape des conditions aux bords. Comme tous les \mathcal{A}_P peuvent être exprimés à partir d'un seul, disons \mathcal{A}_I , I représentant l'identité du groupe des permutations, les conditions de périodicité de la fonction d'onde en $x = 0$ et $x = L$ deviennent pour $j = 1, \dots, N$,

$$e^{ik_j L} \mathcal{A}_I = S_{j+1,j} S_{j+2,j} \dots S_{Nj} S_{1j} S_{2j} \dots S_{j-1,j} \mathcal{A}_I \quad (\text{I.1.3.61})$$

où on a défini la version non-tressée de la matrice de Yang

$$S_{ij} = T_{ij}Y_{ij}(k_i - k_j). \quad (\text{I.1.3.62})$$

On a $S_{ij}S_{k\ell} = S_{k\ell}S_{ij}$ pour i, j, k, ℓ tous différents et elle vérifie la relation d'unitarité et l'équation de Yang-Baxter non-tressée

$$S_{ij}S_{ji} = \mathbb{I} \quad (\text{I.1.3.63})$$

$$S_{ij} S_{ik} S_{jk} = S_{jk} S_{ik} S_{ij} \quad (\text{I.1.3.64})$$

Les N équations (I.1.3.61) sont au coeur de l'ansatz de Bethe et ont un double rôle. D'une part, pour les opérateurs du membre de droite agissant sur \mathcal{A}_I , elles montrent que \mathcal{A}_I est un vecteur propre commun de ces N opérateurs (avec les valeurs propres $e^{ik_j L}$). Les propriétés de S_{ij} permettent de montrer que ces opérateurs commutent et tout le problème est alors de déterminer le vecteur propre commun \mathcal{A}_I . On sait alors que la forme de la fonction d'onde

est complètement fixée. D'autre part, ces N équations aux valeurs propres imposent que $e^{ik_j L}$ soit valeur propre de l'opérateur du membre de droite dans (I.1.3.61). Or les valeurs propres de ces opérateurs sont fixées par les k_j , g et la représentation choisie pour les T_{ij} . On a donc des contraintes sur les valeurs possibles pour les k_j : ce sont les équations de Bethe. Comme l'énergie E est donnée par $E = \sum_{j=1}^N k_j^2$, cela détermine le spectre en énergie.

Les opérateurs T_{ab} agissant sur les \mathcal{A}_P forment une représentation *réductible* de \mathfrak{S}_N de taille $N! \times N!$. La réduction à une représentation irréductible R est à la base de cette résolution généralisée et conditionne la symétrie de la fonction d'onde et donc les statistiques décrites [128]. Par exemple, si R est la représentation identité, alors les T_{ab} se réduisent au scalaire 1 et on retrouve exactement la phase de (I.1.3.44), ce qui est tout à fait cohérent avec le fait que pour cette représentation, la fonction d'onde est totalement symétrique sous l'échange de deux coordonnées et décrit des bosons. Le vecteur \mathcal{A}_I correspond à l'amplitude A_I du paragraphe précédent et les équations de Bethe générales se réduisent bien à (I.1.3.48). Si R est la représentation antisymétrique alors S_{ij} se réduit à -1 et on retrouve le fait que l'interaction δ est triviale pour une fonction d'onde complètement antisymétrique (fermions scalaires). Toutes les autres situations peuvent être envisagées et nous renvoyons à [128] pour un exemple détaillé d'une fonction d'onde décrivant $N - M$ spins "up" et M spins "down" et montrant l'influence de la représentation sur les équations de Bethe.

Quelques mots sur la complétude à présent *i.e.* sur l'étape (iii) de la méthode. La question n'est pas étudiée en détail dans [128] mais des arguments sont avancés en faveur du caractère complet des solutions proposées par l'ansatz de Bethe, à la manière de [82]. Le problème en présence d'états liés est très compliqué mais lorsque $g > 0$, des études rigoureuses ont été entreprises et menées à bien [39]. En présence d'états liés, C.N. Yang a montré dans [129] en étudiant la matrice de diffusion du problème que les solutions du type Bethe donnent aussi des états liés du problème lorsque les k_j sont étendus au plan complexe et correspondent aux pôles de la matrice de diffusion. Afin de montrer que ce n'est pas un cas isolé, nous citons les résultats de [130] qui est entièrement consacré à la preuve de la validité de l'ansatz de Bethe appliqué à un autre système intégrable : la chaîne de spin XXZ .

Nous avons beaucoup insisté sur la contribution de C.N. Yang et nous voudrions maintenant présenter brièvement les apports de R.J. Baxter qui a également donné son nom à la célèbre équation faisant l'objet de cette partie. Les travaux de Baxter qui ont conduit à cette relation, qu'il appelait "relation du triangle ou triangulaire", ont pour origine le modèle de physique statistique appelé modèle *huit vertex*. C'est en développant la résolution complète de ce système que Baxter a eu recours à la relation triangulaire contraignant la matrice des poids de Boltzmann [8], tout comme elle contraignait la matrice de diffusion dans le modèle étudié par C.N. Yang.

Nous voulons maintenant profiter de la richesse de ce modèle pour anticiper un peu la discussion du chapitre 2 et illustrer un autre concept fondamental des systèmes intégrables : la factorisation de la matrice de diffusion.

Nous renvoyons au chapitre 2 pour l'introduction des notions requises et passons immédiatement à la description de la matrice de diffusion pour le problème qui nous occupe. Nous présentons les résultats fondamentaux qui sont dus encore une fois à C.N. Yang et nous renvoyons à son article [129] pour les détails. La discussion est basée sur les résultats précédents obtenus par la méthode de l'ansatz de Bethe et il est clair que tant qu'on ne s'intéresse pas au contenu du modèle en termes de particules ou d'états liés, ces résultats sont indépendants du signe de la constante de couplage g . En outre, pour l'étude des propriétés de diffusion du modèle, on n'impose pas les conditions aux bords et on s'intéresse aux états asymptotiques sur toute la ligne. Dans ce cas, toutes les solutions du problème peuvent être décomposées sur les fonctions d'onde de l'ansatz de Bethe ; en d'autres termes, l'ansatz fournit la base des solutions et l'ansatz est prouvé. La preuve dans le cas général est assez fastidieuse mais on peut se faire une idée en utilisant le calcul d'intégrales de contour. Par exemple, pour le cas complètement symétrique avec $N = 2$, la fonction d'onde donnée par l'ansatz de Bethe s'écrit (on indice explicitement par k_1, k_2 avec $k_1 < k_2$)

$$\psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + \frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig} e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)} & , \quad x_1 < x_2 \\ e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)} + \frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig} e^{i(k_2 x_2 + k_1 x_1)} & , \quad x_2 < x_1 \end{cases} \quad (\text{I.1.3.65})$$

On montre alors, avec $g > 0$,

$$\int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \theta(k_2 - k_1) \psi_{k_1, k_2}^*(x_1, x_2) \psi_{k_1, k_2}(y_1, y_2) = \delta(y_1 - x_1) \delta(y_2 - x_2) + \delta(y_1 - x_2) \delta(y_2 - x_1). \quad (\text{I.1.3.66})$$

Cela repose sur le fait que toutes les intégrales faisant intervenir $\frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig}$, par exemple

$$\int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig} e^{ik_1(y_1 - x_1) + ik_2(y_2 - x_2)}, \quad (\text{I.1.3.67})$$

avec $x_1 < x_2$ et $y_2 < y_1$ sont nulles pour $g > 0$. Toute fonction d'onde du problème ϕ , symétrique en x_1, x_2 peut donc s'écrire

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \langle \psi_{k_1, k_2}, \phi \rangle \psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2). \quad (\text{I.1.3.68})$$

On se replace maintenant dans le cas complètement général où on suppose simplement que $g \neq 0$. Si k_1, \dots, k_N sont les impulsions ordonnées selon $k_1 < \dots < k_N$, il est possible d'identifier les amplitudes des états *in* et *out* avec certains des coefficients $A_P(Q)$ de (I.1.3.53). Pour un état *in* les

amplitudes sont les éléments de $\mathcal{A}_{I'}$ où I' est la permutation qui "renverse" tous les éléments $(1, 2, \dots, N) \rightarrow (N, \dots, 2, 1)$ et pour un état *out* ce sont les éléments de \mathcal{A}_I [129]. En utilisant (I.1.3.56) et en notant pour simplifier $Y_{ij}^{ab} = Y_{ij}(k_a - k_b)$, la transition entre \mathcal{A}_I et $\mathcal{A}_{I'}$ s'écrit

$$\mathcal{A}_I = \{Y_{12}^{21} Y_{23}^{31} \dots Y_{N-1,N}^{N1}\} \{Y_{12}^{32} Y_{23}^{42} \dots Y_{N-2,N-1}^{N2}\} \dots \{Y_{12}^{N,N-1}\} \mathcal{A}_{I'}. \quad (\text{I.1.3.69})$$

La matrice \mathbf{S}' agissant sur $\mathcal{A}_{I'}$ dans le membre de droite n'est pas tout à fait la matrice de diffusion telle qu'elle est définie habituellement. Pour identifier complètement la matrice de diffusion du processus considéré, il faut maintenant tenir compte du fait que les amplitudes rangées dans $\mathcal{A}_{I'}$ décrivent des particules en x_{Qj} associées à l'impulsion k_{N-j+1} et non pas k_j comme dans la définition usuelle de la matrice de diffusion. Pour remédier à cela, il suffit de réarranger les amplitudes dans $\mathcal{A}_{I'}$ en faisant agir la représentation de I' sur ce vecteur. On en déduit que la matrice de diffusion totale \mathbf{S} s'écrit

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' \{T_{12}\} \{T_{23} T_{12}\} \dots \{T_{N-1,N} \dots T_{12}\}. \quad (\text{I.1.3.70})$$

En utilisant la matrice définie dans (I.1.3.62), on peut absorber toutes les permutations pour obtenir finalement

$$\mathbf{S} = \{S_{21} S_{31} \dots S_{N1}\} \{S_{32} S_{42} \dots S_{N2}\} \dots \{S_{N,N-1}\}. \quad (\text{I.1.3.71})$$

C'est un résultat fondamental qui a beaucoup de conséquences. Tout d'abord, on savait que le modèle est exactement résoluble et le raisonnement précédent montre qu'on peut trouver sa matrice de diffusion totale explicitement et ce pour g positif ou négatif. Ensuite, la forme de cette matrice (de taille $N! \times N!$) montre qu'il y a un phénomène de *factorisation* : un processus impliquant N particules se décompose en une succession de processus impliquant les particules deux à deux. En particulier, on voit que la matrice S_{ij} définie par (I.1.3.62) est la matrice de diffusion à deux particules. Enfin, les interactions ont pour seul effet d'échanger les impulsions des particules. Pour les impulsions (réelles) ordonnées selon $k_1 > k_2 > \dots > k_N$, l'élément de matrice noté $\langle A'_1 A'_2 \dots A'_N | \mathbf{S} | A_1 A_2 \dots A_N \rangle$ s'interprète comme l'amplitude de transition entre l'état comprenant la particule A_1 d'impulsion k_1 , la particule A_2 d'impulsion k_2 , etc et l'état comprenant la particule A'_1 d'impulsion k_N , la particule A'_2 d'impulsion k_{N-1} , etc, chaque A'_j correspondant à un A_k . En outre, l'action de l'opérateur T_{ij} apparaissant dans S_{ij} se traduit de la façon suivante, par exemple

$$T_{32} |A_2 A_1 A_4 A_3\rangle = T_{42} |A_2 A_3 A_1 A_4\rangle = |A_2 A_4 A_1 A_3\rangle. \quad (\text{I.1.3.72})$$

Il est important également de noter que S_{ij} est une matrice unitaire : cela assure que la théorie est bien unitaire, autrement dit que \mathbf{S} est une matrice unitaire. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction, renvoyant le lecteur à [129] où il est montré comment \mathbf{S} décrit également la diffusion d'états liés quand $g < 0$.

De façon plus profonde, tous ces résultats suggèrent qu'une théorie quantique des champs unitaire, dont le modèle étudié serait la restriction au sous-espace de Fock à N particules, peut être construite. La présence des solutions de type ansatz de Bethe comme fonction de base (du moins pour le cas répulsif) permet en outre d'envisager des opérateurs création et annihilation correspondant à ces solutions et non pas aux ondes planes habituelles. Nous verrons que toute cette construction est possible et qu'effectivement la matrice S_{ij} intervient dans l'algèbre des opérateurs création et annihilation pour ce problème, comme on pouvait s'y attendre vues les relations d'échange entre les amplitudes $A_P(Q)$.

Chapitre 2

Matrices de diffusion exactes

Motivés par les conclusions du chapitre précédent concernant la matrice de diffusion du problème à N corps en interaction de contact, nous consacrons ce chapitre à la présentation de certains résultats généraux sur les matrices de diffusion dites exactes et le formalisme de théorie quantique des champs qui s'y rattache, dans les sections I.2.1 et I.2.2. Une des notions fondamentales sera le concept d'algèbre *déformée* d'oscillateurs déjà pressentie à la fin du chapitre précédent : *l'algèbre Zamolodchikov-Faddeev*. Comme on peut s'y attendre, cet outil se révélera particulièrement puissant dans le contexte des théories quantiques des champs intégrables. Dès lors, on comprend pourquoi la recherche d'algèbres généralisant cette approche est au coeur des préoccupations lorsqu'on souhaite étudier une théorie en présence d'un bord (purent réflexif) ou d'une impureté. Ces généralisations feront l'objet des sections I.2.3 et I.2.4.

I.2.1 Résultats généraux

La définition précise d'une matrice de diffusion est une tâche ardue. L'idée directrice est de caractériser les propriétés de diffusion de particules en interaction. La dynamique interne d'un tel système est insondable à l'échelle des interactions mais l'idée adoptée en théorie de diffusion est de regarder le système à une échelle de temps (et/ou de distance) suffisamment grande pour que bien avant et bien après l'interaction, la dynamique "ressemble" à une dynamique libre. Tout le travail consiste alors à trouver un objet liant les états présents bien avant l'interaction à ceux présents bien après et rendant compte de ce qui s'est passé entre temps. Cet objet est la matrice de diffusion. En pratique, il s'agit de comparer les états du système en interaction avec les états d'un système libre (sans interaction) vers lesquels les états en interaction semblent "tendre" dans le passé ou le futur lointain (par rapport à l'instant de l'interaction). Tout ceci reste très général et nous renvoyons par exemple à [112] pour une présentation détaillée de ces concepts et de leur formulation mathématique rigoureuse. Nous adopterons ici une vision plus pragmatique (et parfois formelle) afin de présenter certains résultats

généraux pour une théorie quantique des champs intégrable.

Pour ce qui nous intéresse (des systèmes quantiques), l'ensemble des états est un espace de Hilbert (séparable) \mathcal{H} . Dans ce contexte, on peut voir la dynamique de tels états comme des transformations T_t agissant sur les vecteurs de \mathcal{H} . L'indice t représente le temps et indique le lien entre dynamique et évolution dans le temps. Si on note T_t^i et T_t^0 les transformations correspondant aux dynamiques d'interaction et libre respectivement, la question est d'étudier des paires d'états (ψ, ψ_-) d'une part et (ψ, ψ_+) d'autre part telles que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (T_t^i \psi - T_t^0 \psi_{\pm}) = 0 \quad (\text{I.2.1.1})$$

où l'on aura donné un sens précis à la limite. Etant donné ψ se pose alors la question de savoir si ψ_- et ψ_+ existent et sont uniques. Ensuite, comme on espère "recoller" à la dynamique libre asymptotiquement en $-\infty$ et $+\infty$, il faut s'assurer que l'ensemble \mathcal{H}_{in} des $\psi \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $\psi_- \in \mathcal{H}$ vérifiant (I.2.1.1) en $-\infty$ et l'ensemble \mathcal{H}_{out} des $\psi \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $\psi_+ \in \mathcal{H}$ vérifiant (I.2.1.1) en $+\infty$ sont égaux. C'est la notion de *complétude asymptotique*.

Si ces questions sont résolues, on peut alors introduire un opérateur reliant les états asymptotiques passés et futurs du système en interaction considéré. C'est une transformation linéaire unitaire de \mathcal{H}_{out} sur \mathcal{H}_{in} , notée communément **S** et appelée *matrice de diffusion*. Terminons sur le fait que pour une dynamique quantique, les transformations T_t sont du type bien connu e^{iHt} de groupe unitaire où H est un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} (indépendant du temps). Il est bien évident que tout ceci est très schématique et que chaque situation recèle des complications. Par exemple, il arrive que l'espace des états pour la dynamique libre et celui pour la dynamique en interaction soient différents.

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre des systèmes intégrables à $1 + 1$ dimensions. D'après les résultats obtenus dans le chapitre précédent pour la matrice de diffusion correspondant à l'interaction de contact, nous pouvons espérer des propriétés très intéressantes telles que la factorisation des processus. En effet, un système intégrable est caractérisé par l'existence de quantités indépendantes (intégrales du mouvement ou charges) qui restent conservées dans l'évolution du système. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que ces quantités commutent avec l'opérateur Hamiltonien ou la matrice de diffusion, et sont en involution (on parle de hiérarchies intégrables). Intuitivement, on comprend que cela restreint les possibilités d'évolution permises et ce d'autant plus que ces quantités sont plus nombreuses. Nous devons préciser à ce stade que nous avons mis sous le même nom deux notions différentes : lorsqu'on parle de quantités conservées et de quantités en involution ou commutant avec l'Hamiltonien, dans le premier cas nous devrions plutôt parler des *valeurs propres* (qui sont conservées) des *opérateurs* du deuxième cas (qui sont en involution et qui commutent

avec l'Hamiltonien). Cette précision étant faite, nous continuerons d'appeler quantité conservée l'opérateur Q ou sa valeur propre q suivant le contexte.

Pour se fixer les idées, on introduit une notation pour les états de \mathcal{H}_{in} et \mathcal{H}_{out} inspirée de la notion de représentation de Fock où l'on travaille sur des sous-espaces de l'espace de Fock représentant un nombre fixe de particules. On autorise a priori plusieurs types de particules massives (donc plusieurs masses différentes) et pour permettre une première discussion ne faisant pas explicitement référence à une théorie relativiste ou non, on utilise un paramètre k défini par $k = \frac{p}{m}$ si p est l'impulsion de la particule et m sa masse. Pour une théorie relativiste, k est reliée à la rapidité θ par $k = \sinh \theta$ et pour une théorie non-relativiste, k est tout simplement la vitesse. Nous conviendrons d'un abus de langage pour la suite : nous continuerons d'appeler k "l'impulsion". Un état à N particules de \mathcal{H}_{in} est noté

$$|A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} \quad , \quad k_1 > k_2 > \dots > k_N \quad , \quad (I.2.1.2)$$

tandis qu'un état à M particules de \mathcal{H}_{out} est noté

$$|A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} \quad , \quad k'_1 < k'_2 < \dots < k'_M \quad . \quad (I.2.1.3)$$

Les symboles A_a sont là pour représenter formellement chaque particule de type a et d'impulsion k et n'ont pas à ce niveau de la discussion une définition rigoureuse (qui peut être donnée dans le cadre des représentations de Fock de \mathcal{H}_{in} et \mathcal{H}_{out}). Dans la suite, on supposera qu'il y a n types de particules ou n degrés de liberté internes et que a varie de 1 à n . A présent, dans le cadre d'une théorie intégrable on suppose qu'il existe une infinité (dénombrable) de quantités conservées indépendantes $Q^{(s)}$ indexées par \mathbb{N} et que ces quantités correspondent à des intégrales de densités locales. Des exemples typiques sont l'impulsion et l'énergie relativistes qui sont les intégrales des composantes temporelles du tenseur impulsion-énergie. Comme les $Q^{(s)}$ sont en involution, on suppose en outre que les états (I.2.1.2) et (I.2.1.3) sont vecteurs propres communs. Tout cela permet d'écrire

$$Q^{(s)}|A_a(k)\rangle_{\#} = q_a^{(s)}k^s|A_a(k)\rangle_{\#} \quad , \quad \# = in, out \quad , \quad (I.2.1.4)$$

où $q_a^{(s)}$ est indépendant de k . On obtient alors

$$Q^{(s)}|A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{\#} = \sum_{j=1}^N q_{a_j}^{(s)} k_j^s |A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{\#} \quad . \quad (I.2.1.5)$$

Remarquons que (I.2.1.4) est motivée par les situations typiques rencontrées en systèmes intégrables : par exemple, $Q^{(s)}$ est un opérateur de rang s sous les transformations de Lorentz (s étant alors le spin correspondant). Les coefficients $q_a^{(s)}$ sont les charges généralisées. Pour $s = 1$ par exemple, elles correspondent aux masses m_a des particules de type a .

On exploite maintenant le fait que les $Q^{(s)}$ sont conservées dans un processus quelconque entre un état à N particules et un état à M particules. Cela se traduit par $[Q^{(s)}, \mathbf{S}] = 0$ et on a

$$\begin{aligned}
Q^{(s)} \mathbf{S} |A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} &= Q^{(s)} |A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} \\
&= \sum_{j=1}^N q_{a_j}^{(s)} k_j^s |A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} \\
&= \mathbf{S} Q^{(s)} |A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} \\
&= \mathbf{S} \left(\sum_{j=1}^M q_{b_j}^{(s)} k_j'^s |A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} \right) \\
&= \sum_{j=1}^M q_{b_j}^{(s)} k_j'^s |A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble (infini) d'équations contraignant les k_j et les k'_ℓ : pour N et M donnés et $\forall s \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{j=1}^N q_{a_j}^{(s)} k_j^s = \sum_{j=1}^M q_{b_j}^{(s)} k_j'^s. \quad (\text{I.2.1.6})$$

Pour un ensemble de N impulsions *in* données, ces équations admettent la solution triviale $N = M$ et, à une permutation près des impulsions *out*, $k_j = k'_j$ et $q_{a_j}^{(s)} = q_{b_j}^{(s)}$, $j = 1, \dots, N$. Le point intéressant (discuté un peu plus en détail dans [38]) est que c'est la seule solution envisageable physiquement. On en conclut que l'existence d'une infinité de quantités conservées entraîne la conservation du nombre de particules dans les processus (il n'y pas de production de particules, ce qui est un résultat fort pour une théorie relativiste) et la conservation individuelle des impulsions k_j caractérisant la dynamique des particules. Ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus à la fin du chapitre précédent. Nous insistons cependant sur le caractère peu rigoureux de cette discussion dont la motivation est d'exposer des arguments intuitifs menant à des résultats sur les matrices \mathbf{S} exactes qui ont été établis rigoureusement par ailleurs.

À ce titre, nous notons que ce raisonnement ne permet pas de voir facilement le phénomène de factorisation de la matrice \mathbf{S} . Pour cela, nous allons nous appuyer sur les résultats de S. Parke [102] qui a établi les deux propriétés précédentes (absence de production de particules et conservation individuelle des "impulsions") plus la propriété de factorisation de la matrice \mathbf{S} pour une théorie quantique des champs relativiste, massive, à $1+1$ dimensions possédant (seulement) deux charges locales conservées, commutantes et de spins différents et ne valant ni 1 (vecteur) ni 0 (scalaire). Le raisonnement peut être résumé de la façon suivante. Il s'agit d'utiliser les charges pour déplacer les régions d'espace-temps où les paquets d'onde des particules se chevauchent *i.e.* les régions où les interactions ont lieu. Comme les charges commutent

avec la matrice S , cela ne change pas les amplitudes de transition pour un processus donné mais permet de décomposer n'importe quel processus impliquant N particules en une succession de processus impliquant les particules deux à deux : c'est la factorisation. En simplifiant les arguments développés dans [102], prenons un état à une particule d'impulsion moyenne k_0 et de position moyenne x_0 représenté de la façon suivante

$$|x_0, k_0\rangle = e^{ik(x-x_0)}|A(k_0)\rangle. \quad (\text{I.2.1.7})$$

L'action de $e^{-i\beta Q^{(s)}}$ sur cet état produit une phase $\omega(k) = -\beta q^{(s)}k^s$. Le nouvel état est alors

$$|x'_0, k_0\rangle = e^{ik(x-x'_0)}|A(k_0)\rangle, \quad (\text{I.2.1.8})$$

et un argument standard de phase stationnaire permet de déterminer la nouvelle position moyenne x'_0 de cet état :

$$x'_0 = x_0 - \frac{d\omega}{dk}(k_0). \quad (\text{I.2.1.9})$$

Pour $s \neq 0, 1$, la nouvelle position moyenne du paquet d'onde, $x'_0 = x_0 + s \beta q^{(s)} k_0^{s-1}$, dépend de k_0 . Imaginons alors un processus à N particules. En présence d'interactions, de façon générale l'état à N particules n'est pas juste le produit d'états à une particule mais on peut néanmoins considérer ce produit comme une bonne approximation dans les situations où les particules sont très éloignées les unes des autres (à l'échelle de l'interaction). En appliquant la transformation à cet état, on obtient que chaque particule dans le processus voit sa position moyenne modifiée d'une quantité dépendant de son impulsion. Cette constatation est à l'origine des résultats établis par Parke en supposant l'existence de seulement deux quantités conservées (au lieu de l'infinité considérée précédemment). Il retrouve le fait qu'il n'y a pas de production de particules et que les impulsions sont conservées individuellement. Nous voulons simplement ici utiliser l'action de $e^{-i\beta Q^{(s)}}$ pour en déduire la factorisation d'un processus à trois particules en une succession de processus à deux particules (la généralisation à N particules se faisant par récurrence).

Considérons un état à trois particules du type (I.2.1.7) noté $|123\rangle$ pour simplifier. La conservation de $Q^{(s)}$ nous permet d'écrire

$${}_{in}\langle 1'2'3'|\mathbf{S}|123\rangle_{out} = {}_{in}\langle 1'2'3'|e^{i\beta Q^{(s)}}\mathbf{S}e^{-i\beta Q^{(s)}}|123\rangle_{out}. \quad (\text{I.2.1.10})$$

Comme il y a conservation du nombre de particules et des impulsions individuelles dans la processus, il y a trois situations possibles décrites dans la figure 2.1. Les lignes sont bien sûr des idéalisations du parcours de chaque particule car le paquet d'onde a une extension spatiale non nulle. Néanmoins, l'étude de [102] montre que cette schématisation contient l'essentiel de l'information. Soit les particules sont dans les situations (1) ou (3) et le processus est directement une succession de processus à deux particules donc

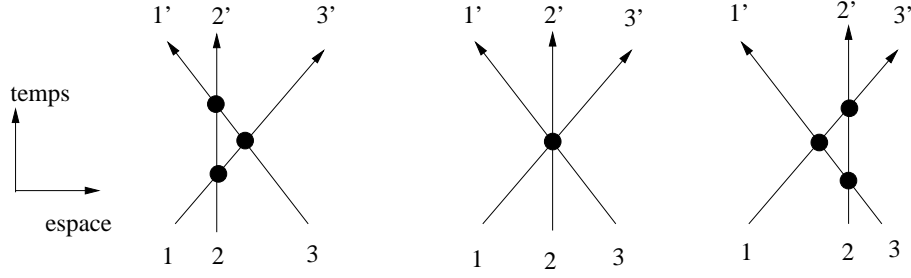


FIG. 2.1 – Schéma montrant les possibilités d'interaction dans un processus à 3 particules

il n'y a rien à faire. Soit elles sont dans la situation (2) où les trois paquets se superposent dans une même région d'espace-temps et donnent lieu a priori à un processus pleinement à trois particules. Dans ce cas, on peut se servir de l'action décrite dans (I.2.1.10) pour se ramener à une situation de type (1) ou (3). En effet, comme la modification de la position moyenne dépend de l'impulsion de la particule considérée, on peut toujours trouver β pour séparer suffisamment les parcours des particules [102]. Ce raisonnement se généralise facilement par récurrence pour un processus quelconque à N particules et permet donc de conclure sur la factorisation du processus.

En prime, nous avons une vision diagrammatique de ce phénomène. Mais ce n'est pas tout car on peut pousser plus loin le raisonnement et se servir de (I.2.1.10) pour en déduire que les processus (1) et (3) correspondent au même élément de matrice. C'est ainsi que nous retrouvons dans le contexte de la théorie de diffusion l'équation de Yang-Baxter pour la matrice de diffusion à deux particules

$$\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{23} = \mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{12} \quad (\text{I.2.1.11})$$

En outre, il est maintenant possible de représenter cette équation par des diagrammes (voir figure 2.2).

Dès lors, tous les efforts sont portés sur la détermination de la matrice de diffusion à deux particules. Dans le chapitre précédent, nous avons vu la solution de C.N. Yang pour le modèle non-relativiste de l'interaction de contact. Plusieurs autres solutions correspondant à des modèles intégrables à $1+1$ dimensions ont été découvertes depuis (voir par exemple [134, 135]) et suivant les cas, plusieurs propriétés supplémentaires de la matrice de diffusion sont utilisées (en plus de l'unitarité bien sûr) : analyticité dans le plan complexe, invariance sous les symétries discrètes (parité, conjugaison de charge, inversion du temps) le cas échéant et même le programme dit de "bootstrap" développé pour déterminer le spectre des  tats liés.

Il est intéressant de noter qu'on peut intuitivement utiliser ces résultats en $d+1$ dimensions, $d > 1$. Dans ce cas, le fait de pouvoir décaler la "trajectoire" d'une particule parallèlement à elle-même mais d'une quantité arbitraire sans changer l'élément de matrice correspondant se traduit par

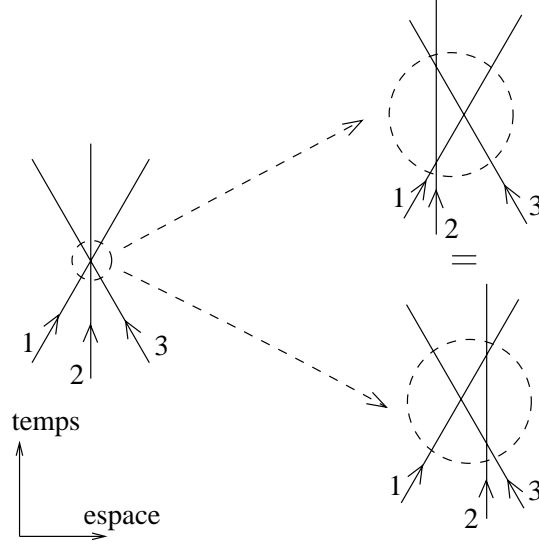


FIG. 2.2 – Équation de Yang-Baxter

une matrice de diffusion triviale. En effet, s'il y a plus d'une dimension spatiale, on peut toujours faire en sorte que la particule translatée ne croise plus aucune des autres particules impliquées dans le processus. Cette conclusion intuitive est soutenue par le théorème de S. Coleman et J. Mandula [29] montrant qu'une théorie possédant une charge conservée dont la transformation sous le groupe de Lorentz correspond à un tenseur de rang supérieur ou égal à 2 (en dimension $d > 1$) a nécessairement une matrice de diffusion triviale.

I.2.2 Description algébrique des états asymptotiques

Dans cette section, nous allons voir comment les résultats généraux précédents permettent de développer une présentation purement algébrique des processus de diffusion d'une théorie dont la matrice de diffusion possède les propriétés déjà évoquées : absence de production de particules, conservation individuelle des impulsions et factorisation. On parlera de *théorie factorisable*.

I.2.2.1 Algèbre de Zamolodchikov-Faddeev

Avant de nous restreindre au cas d'une théorie factorisable, revenons rapidement sur le cas général. Notons $\mathbf{S}_{a_N \dots a_1}^{b_1 \dots b_M}(k_N, \dots, k_1 | k'_1, \dots, k'_M)$ l'élément de matrice entre deux états normalisés (à la distribution δ) à N et M particules,

$$\mathbf{S}_{a_N \dots a_1}^{b_1 \dots b_M}(k_N, \dots, k_1 | k'_1, \dots, k'_M) = \text{out} \langle A_{b_M}(k'_M) \dots A_{b_1}(k'_1) | A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N) \rangle_{\text{in}}. \quad (\text{I.2.2.12})$$

Cette notation peut sembler aller à l'encontre de l'intuition mais elle se révélera utile dans la suite. D'après la section précédente, on peut alors écrire, en utilisant la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés,

$$|A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} = \sum_{M=2}^{\infty} \int d^M k' \mathbf{S}_{a_N \dots a_1}^{b_1 \dots b_M}(k_N, \dots, k_1 | k'_1, \dots, k'_M) \times |A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} \quad (\text{I.2.2.13})$$

où $k_1 > \dots > k_N$ et où l'intégrale porte sur la région $k'_1 < \dots < k'_M$. On se place maintenant dans le cadre d'une théorie factorisable : $N = M$ et les ensembles $\{k_1, \dots, k_N\}$ et $\{k'_1, \dots, k'_N\}$ sont les mêmes. Il est en outre suffisant de s'intéresser au cas $N = 2$. On obtient

$$|A_{a_1}(k_1)A_{a_2}(k_2)\rangle_{in} = \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1) |A_{b_2}(k_2)A_{b_1}(k_1)\rangle_{out} . \quad (\text{I.2.2.14})$$

L'idée est de définir des éléments algébriques toujours notés $A_a(k)$ et dont les représentations reproduiraient les états *in* et *out* précédents [135]. L'échange de deux symboles s'écrit

$$A_{a_1}(k_1)A_{a_2}(k_2) = \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1) A_{b_2}(k_2)A_{b_1}(k_1) , \quad k_1 > k_2 . \quad (\text{I.2.2.15})$$

La contrainte $k_1 > k_2$ dans ce cas correspond à la cinématique des états *in* et *out* dont on s'est inspiré. La représentation diagrammatique de ce processus est la suivante

$$\mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_1 b_2}(k_2, k_1) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{b_1}(k_2) & A_{b_2}(k_1) \end{array} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \begin{array}{cc} A_{a_1}(k_1) & A_{a_2}(k_2) \end{array} \end{array}$$

FIG. 2.3 – La matrice d'échange dans l'algèbre est la matrice de diffusion à deux particules

On peut maintenant se servir de (I.2.2.15) pour échanger les symboles du membre de droite ($\mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}$ étant définie pour tout k_1, k_2) et comme le but est de définir une algèbre de façon cohérente et univoque pour ces symboles, cela impose la relation suivante

$$\mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1) \mathbf{S}_{b_1 b_2}^{c_1 c_2}(k_1, k_2) = \delta_{a_1}^{c_1} \delta_{a_2}^{c_2} \quad (\text{I.2.2.16})$$

Cette relation est connue sous le nom de *relation d'unitarité* pour la matrice de diffusion à deux particules. Néanmoins, il faut garder à l'esprit qu'elle ne correspond pas à l'*unitarité physique* reliant \mathbf{S} et sa transposée conjuguée \mathbf{S}^\dagger par la relation

$$(\mathbf{S}^\dagger)_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2) \mathbf{S}_{b_1 b_2}^{c_1 c_2}(k_1, k_2) = \delta_{a_1}^{c_1} \delta_{a_2}^{c_2} . \quad (\text{I.2.2.17})$$

On requiert alors la propriété *d'analyticité hermitienne* [135] afin de s'assurer que la théorie est unitaire

$$(\mathbf{S}^\dagger)_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2) = \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1). \quad (\text{I.2.2.18})$$

Tout cela permet d'étendre la relation d'échange (I.2.2.15) à $k_1 < k_2$. On peut donc utiliser les symboles $A_a(k)$ sans restriction d'ordre sur les impulsions. En revanche, l'identification aux états asymptotiques doit être accompagnée de la prescription cinématique correspondante.

La question de l'associativité pour une succession de trois symboles ayant la propriété (I.2.2.15) se pose si l'on veut pouvoir l'interpréter comme un produit d'éléments d'algèbre. Prenons une succession de trois éléments $A_{a_1}(k_1)$, $A_{a_2}(k_2)$ et $A_{a_3}(k_3)$, on veut pouvoir donner un sens à $A_{a_3}(k_3)A_{a_2}(k_2)A_{a_1}(k_1)$. Pour cela, il faut s'assurer que

$$A_{a_3}(k_3) \left(A_{a_2}(k_2) A_{a_1}(k_1) \right) = \left(A_{a_3}(k_3) A_{a_2}(k_2) \right) A_{a_1}(k_1). \quad (\text{I.2.2.19})$$

En utilisant (I.2.2.15), on voit que la condition suivante est suffisante

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2) \mathbf{S}_{b_1 a_3}^{c_1 b_3}(k_1, k_3) \mathbf{S}_{b_2 b_3}^{c_2 c_3}(k_2, k_3) = \\ \mathbf{S}_{a_2 a_3}^{b_2 b_3}(k_2, k_3) \mathbf{S}_{a_1 b_3}^{b_1 c_3}(k_1, k_3) \mathbf{S}_{b_1 b_2}^{c_1 c_2}(k_1, k_2). \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.20})$$

Un élément du type $A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N)$ peut alors être interprété comme le produit (associatif) des éléments $A_{a_1}(k_1), \dots, A_{a_N}(k_N)$ indexés par $a_j = 1, \dots, n$ et $k \in \mathbb{C}$. Nous allons maintenant interpréter tout cela algébriquement. Soit \mathcal{A} l'algèbre associative engendrée par $A_a(k)$, $a = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{C}$.

Définition I.2.2.1 *L'algèbre de Zamolodchikov est l'algèbre \mathcal{A}_Z quotient de \mathcal{A} par la relation*

$$A_{a_1}(k_1) A_{a_2}(k_2) = \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1) A_{b_2}(k_2) A_{b_1}(k_1), \quad (\text{I.2.2.21})$$

la matrice \mathbf{S} ayant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1) \mathbf{S}_{b_1 b_2}^{c_1 c_2}(k_1, k_2) &= \delta_{a_1}^{c_1} \delta_{a_2}^{c_2}, \\ (\mathbf{S}^\dagger)_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2) &= \mathbf{S}_{a_2 a_1}^{b_2 b_1}(k_2, k_1), \\ \mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2) \mathbf{S}_{b_1 a_3}^{c_1 b_3}(k_1, k_3) \mathbf{S}_{b_2 b_3}^{c_2 c_3}(k_2, k_3) &= \mathbf{S}_{a_2 a_3}^{b_2 b_3}(k_2, k_3) \mathbf{S}_{a_1 b_3}^{b_1 c_3}(k_1, k_3) \mathbf{S}_{b_1 b_2}^{c_1 c_2}(k_1, k_2). \end{aligned}$$

Notons que cette définition est un peu plus générale que celle de l'approche historique dans laquelle la matrice \mathbf{S} ne dépend que de la différence $k_1 - k_2$. Les propriétés de la matrice \mathbf{S} permettent d'établir un théorème de *Poincaré-Birkhoff-Witt* pour l'algèbre de Zamolodchikov (voir par exemple [27]).

Introduisons maintenant une notation qui nous servira tout au long de ce manuscrit et qui fait appel à la notion d'espace auxiliaire. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n et soit E_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ la base canonique de $\text{End}(\mathbb{C}^n)$: $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$. On se sert de cette base pour ranger les éléments

de la matrice de diffusion à deux particules et obtenir une fonction à valeurs matricielles $\mathbf{S}_{12} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes V_2)$ où V_1 et V_2 sont deux copies de V

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) = \mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2)(E_{a_1 b_1} \otimes E_{a_2 b_2}). \quad (\text{I.2.2.22})$$

On introduit aussi la base canonique e_j , $j = 1, \dots, n$ de \mathbb{C}^n pour définir $A(k)$

$$A(k) = A_a(k)e_a. \quad (\text{I.2.2.23})$$

En plongeant \mathbf{S} dans $\text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ avec par exemple

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) = \mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2)(E_{a_1 b_1} \otimes E_{a_2 b_2} \otimes \mathbb{I}), \quad (\text{I.2.2.24})$$

la relation (I.2.2.20) prend alors la forme de l'équation de Yang-Baxter

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)\mathbf{S}_{13}(k_1, k_3)\mathbf{S}_{23}(k_2, k_3) = \mathbf{S}_{23}(k_2, k_3)\mathbf{S}_{13}(k_1, k_3)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) \quad (\text{I.2.2.25})$$

où les impulsions sont explicites. Pour retrouver (I.2.2.20), il suffit de projeter la relation précédente sur la base $E_{a_1 c_1} \otimes E_{a_2 c_2} \otimes E_{a_3 c_3}$ de $\text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$. En résumé, l'algèbre de Zamolodchikov code toutes les propriétés de la matrice de diffusion d'une théorie factorisable. Comme on vient de le voir, sa cohérence interne est assurée par la relation d'unitarité et l'équation de Yang-Baxter et, partant d'une chaîne d'éléments $A_1(k_1) \dots A_N(k_N)$ avec $k_1 > \dots > k_N$ représentant un état *in*, on peut réarranger les éléments par une succession d'échange du type (I.2.2.15) pour obtenir l'état *out* correspondant à $A_N(k_N) \dots A_1(k_1)$. Cette procédure montre directement l'absence de production de particules, la conservation des impulsions individuelles et la factorisation du processus. Nous retrouvons le résultat de Yang (I.1.3.71) présenté à la fin du chapitre précédent (mais pour une matrice de diffusion générique ici)

$$A_1(k_1) \dots A_N(k_N) = \{\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1) \dots \mathbf{S}_{N1}(k_N, k_1)\} \dots \{\mathbf{S}_{N, N-1}(k_N, k_{N-1})\} \\ \times A_N(k_N) \dots A_1(k_1), \quad (\text{I.2.2.26})$$

donnant la matrice de diffusion à N particules pour une théorie factorisable.

Dans [43], l'algèbre de Zamolodchikov que nous venons de présenter trouve une réalisation dans le cadre de la *méthode de diffusion inverse quantique* appliquée à l'équation de Schrödinger non-linéaire (que nous présenterons dans la deuxième partie du manuscrit). Grâce aux relations de commutation des éléments de la *matrice de monodromie*, L.D. Faddeev a construit des opérateurs pouvant être interprétés comme des opérateurs création et annihilation dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique. D'un point de vue algébrique, les opérateurs création de Faddeev fournissent la réalisation de l'algèbre de Zamolodchikov dans le cas de particules sans symétrie interne (cas scalaire) et pour une matrice d'échange qui n'est autre que la version scalaire de la matrice de Yang (I.1.3.62). Notons en passant que cela confirme l'étroite relation entre le modèle de l'interaction de contact et l'équation de Schrödinger non-linéaire. Il y a en outre la présence des opérateurs annihilation et la méthode

de diffusion inverse quantique donne les relations d'échange entre tous ces opérateurs. Il apparaît que ces relations permettent de définir une algèbre "à la Zamolodchikov" pour des éléments que nous allons noter désormais $a_j(k)$ et $a^{\dagger j}(k)$. L'indice j représente les possibles degrés internes (absents dans l'approche historique de [43] mais facilement rétablis) et k est toujours l'impulsion. Cette algèbre appelée *algèbre de Zamolodchikov-Faddeev* (algèbre ZF dans la suite) intervient comme une déformation de l'algèbre d'oscillateurs standard apparaissant dans l'étude du champ libre. En utilisant les notations d'espace auxiliaire introduite précédemment, l'algèbre ZF, que l'on notera \mathcal{A}_S , est l'algèbre associative d'unité $\mathbf{1}$ engendrée par les générateurs $a_j(k)$ et $a^{\dagger j}(k)$ et quotientée par les relations

$$a_1(k_1)a_2(k_2) = \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)a_2(k_2)a_1(k_1), \quad (\text{I.2.2.27})$$

$$a_1^{\dagger}(k_1)a_2^{\dagger}(k_2) = a_2^{\dagger}(k_2)a_1^{\dagger}(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1), \quad (\text{I.2.2.28})$$

$$a_1(k_1)a_2^{\dagger}(k_2) = a_2^{\dagger}(k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)a_1(k_1) + 2\pi\delta_{12}\delta(k_1 - k_2)\mathbf{1}, \quad (\text{I.2.2.29})$$

où l'on a défini $a^{\dagger}(k) = \sum_{j=1}^n a^{\dagger j}(k) e_j^{\dagger}$ avec e_j^{\dagger} , $j = 1, \dots, n$ base duale de e_j , $j = 1, \dots, n$, et

$$a_1(k) = \sum_{j=1}^n a_j(k) (e_j \otimes \mathbb{I}) \quad , \quad a_2(k) = \sum_{j=1}^n a_j(k) (\mathbb{I} \otimes e_j), \quad (\text{I.2.2.30})$$

idem en $a^{\dagger}(k)$. Enfin, δ_{12} est donné par

$$\delta_{12} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} (e_i \otimes e_j^{\dagger}). \quad (\text{I.2.2.31})$$

De la même façon que précédemment, \mathcal{A}_S code toutes les propriétés intéressantes de la matrice de diffusion : unitarité, équation de Yang-Baxter, factorisation, etc. On retrouve le cas de bosons (resp. fermions) libres pour $\mathbf{S} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ (resp. $\mathbf{S} = -\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$).

I.2.2.2 Représentation de Fock

Nous verrons dans la deuxième partie de ce manuscrit que cette algèbre est fondamentale dans la méthode de diffusion inverse quantique appliquée à l'équation de Schrödinger non-linéaire. Dans ce contexte, une interprétation rigoureuse de $a(k)$ et $a^{\dagger}(k)$ comme opérateurs de création et d'annihilation agissant sur un espace de Fock est nécessaire. Cette question fut étudiée par A. Liguori et M. Mintchev dans [83] et nous présentons les grandes lignes de la construction ici. L'objet de base d'une représentation de Fock est un espace de Hilbert (séparable) \mathcal{H} sur lequel on va représenter nos éléments d'algèbre par des opérateurs. Nous prendrons $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^n L^2(\mathbb{R}, dk)$ muni du

produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^n \int \frac{dk}{2\pi} f_j^*(k) g_j(k) \equiv \int \frac{dk}{2\pi} f^\dagger(k) g(k). \quad (\text{I.2.2.32})$$

Dans la deuxième notation, on a utilisé le caractère vectoriel d'un élément de \mathcal{H} . L'espace permettant la représentation d'un état à N particules est alors le produit tensoriel $\mathcal{H}^{\otimes N} \equiv \mathcal{H}^N$ avec $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}^n$. L'espace de Fock sur \mathcal{H} , $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ rassemble tous les espaces à N particules (n'oublions pas que le but est de représenter une théorie des champs) et s'écrit

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N. \quad (\text{I.2.2.33})$$

Il se trouve que les opérateurs qui seront considérés ne sont en général pas bornés et il sera très utile d'utiliser un sous-espace dense de $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Celui-ci est très intuitif et correspond à l'ensemble des sous-espaces à nombre de particules fini. Si l'on représente un élément de $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ par une suite $(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^N, \dots)$ où chaque φ^p est un élément de \mathcal{H}^p alors on définit $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^0$ comme l'ensemble des suites tronquées à partir d'un certain N . Par construction, cet espace est dense dans $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Notons qu'un élément φ de \mathcal{H}^N peut être représenté comme un vecteur colonne dont les entrées $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}$, $\alpha_i = 1, \dots, n$ peuvent être rangées en utilisant la notation d'espaces auxiliaires. Ainsi, on note

$$\varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N=1}^n \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(k_1, \dots, k_N) (e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_N}). \quad (\text{I.2.2.34})$$

Dans la pratique, on se simplifie encore la vie en utilisant un sous-espace de \mathcal{H}^N , dense dans \mathcal{H}^N , constitué des combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{D}^N défini par

$$\mathcal{D}^N = \{f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_N \mid f_i \in \mathcal{H}\} \quad , \quad \mathcal{D}^0 = \mathbb{C}^n. \quad (\text{I.2.2.35})$$

Vient alors la définition standard d'opérateurs création et annihilation. Etant donnée $f \in \mathcal{H}$, on définit $b(f)$ et $b^\dagger(f)$ par

$$\begin{aligned} b(f) : \quad & \mathcal{D}^N \rightarrow \mathcal{D}^{N-1} \quad , \quad N \geq 1 \\ f_1 \otimes \dots \otimes f_{N+1} & \mapsto \sqrt{N} \langle f, f_1 \rangle f_2 \otimes \dots \otimes f_{N+1}, \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.36})$$

et

$$\begin{aligned} b^\dagger(f) : \quad & \mathcal{D}^N \rightarrow \mathcal{D}^{N+1} \quad , \quad N \geq 0 \\ f_1 \otimes \dots \otimes f_N & \mapsto \sqrt{N+1} f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_N. \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.37})$$

Cette définition est étendue par linéarité à toute combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{D}^N . Soit φ une telle combinaison linéaire, un résultat important de continuité est le suivant

$$\|b(f)\varphi\| \leq \sqrt{N} \|f\| \|\varphi\| \quad , \quad \|b^\dagger(f)\varphi\| \leq \sqrt{N+1} \|f\| \|\varphi\|. \quad (\text{I.2.2.38})$$

Cela permet d'étendre par continuité ces deux opérateurs sur \mathcal{H}^N et ensuite par linéarité sur tout $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^0$. La notation b^\dagger prend alors un sens rigoureux puisqu'on peut montrer que pour $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^0$,

$$\langle b^\dagger(f)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, b(f)\psi \rangle. \quad (\text{I.2.2.39})$$

Jusqu'à maintenant, nous n'avons encore rien dit sur la nature des particules qui sont "créées" et "annihilées". Il convient de traduire la statistique des particules que l'on veut représenter. Cela se fait en sélectionnant dans l'espace à N particules les fonctions ayant la "bonne symétrie". En effet, en mécanique quantique, on sait qu'une fonction d'onde décrivant N bosons (resp. N fermions) est complètement symétrique (resp. antisymétrique). Prenant une fonction ψ dans \mathcal{H}^N , il est très facile de la symétriser (ψ^B) ou de l'antisymétriser (ψ^F)

$$\psi_{1\dots N}^B(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} \psi_{P1\dots PN}(k_{P1}, \dots, k_{PN}), \quad (\text{I.2.2.40})$$

$$\psi_{1\dots N}^F(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} (-)^P \psi_{P1\dots PN}(k_{P1}, \dots, k_{PN}), \quad (\text{I.2.2.41})$$

$(-)^P$ étant la signature de la permutation. En fait cette procédure peut être vue comme la représentation d'un opérateur projection \mathcal{P}_B (resp. \mathcal{P}_F) associé au groupe des permutations (qui est aussi le groupe de Weyl de l'algèbre de Lie A_N , ce qui sera utile pour la généralisation au cas avec bord et avec impureté). Ce point de vue permettra de construire les représentations de Fock de l'algèbre de bord et de l'algèbre Réflexion-Transmission comme nous le verrons dans les sections suivantes. L'idée est de définir une représentation des générateurs T_i du groupe des permutations \mathfrak{S}_N dont on rappelle les relations de définition

$$T_i T_i = \mathbf{1}, \quad (\text{I.2.2.42})$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad (\text{I.2.2.43})$$

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad |i - j| > 1. \quad (\text{I.2.2.44})$$

Pour une statistique bosonique (resp. fermionique), on définit pour $\varphi \in \mathcal{H}^N$

$$[T_i^B \varphi]_{1\dots ii+1\dots N}(k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_N) = \varphi_{1\dots i+1i\dots N}(k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_N),$$

resp.

$$[T_i^F \varphi]_{1\dots ii+1\dots N}(k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_N) = -\varphi_{1\dots i+1i\dots N}(k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_N).$$

Il est facile de vérifier que T_i^B et T_i^F , $i = 1, \dots, N-1$ (avec $\mathbf{1}$ représenté trivialement) forment chacun une représentation de \mathfrak{S}_N . On construit alors l'espace de Fock bosonique $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^B$ (resp. fermionique $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^F$) en se restreignant à \mathcal{H}_B^N (resp. \mathcal{H}_F^N) défini par

$$\mathcal{H}_B^N = \mathcal{P}_B^N \mathcal{H}^N, \quad (\text{resp. } \mathcal{H}_F^N = \mathcal{P}_F^N \mathcal{H}^N), \quad (\text{I.2.2.45})$$

avec

$$\mathcal{P}_\#^N = \frac{1}{N!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_N} T_P^\# \quad , \quad \# = B \text{ (resp. } F) . \quad (\text{I.2.2.46})$$

L'opérateur $T_P^{B/F}$ est construit à partir de $T_i^{B/F}$ en utilisant une décomposition de P en une succession de transpositions adjacentes et le fait qu'on dispose d'une représentation. Notons $\# = B$ ou F . En choisissant $\mathcal{P}_\#^0 = \mathbf{1} = \mathcal{P}_\#^1$, l'ensemble des projecteurs $\mathcal{P}_\#^N$, $N = 0, 1, \dots$ détermine le projecteur $\mathcal{P}_\#$ de $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ sur $\mathcal{F}_\mathcal{H}^\#$. Les opérateurs création et annihilation correspondant sont donnés par

$$a_\#^{(\dagger)} = \mathcal{P}_\# b^{(\dagger)} \mathcal{P}_\# . \quad (\text{I.2.2.47})$$

On montre alors que ces opérateurs satisfont les relations canoniques d'(anti) commutation et fournissent donc une représentation de l'algèbre d'oscillateurs (non déformée). Tout ceci est standard et le résultat fondamental de [83] est que la généralisation de cette construction à une statistique quelconque gouvernée par \mathbf{S} fournit une représentation de Fock de l'algèbre ZF. Le point crucial est de remplacer le projecteur $\mathcal{P}_\#$ par le projecteur $\mathcal{P}_\mathbf{S}$ qui est défini de la même façon mais à partir d'une autre représentation de \mathfrak{S}_N

$$\begin{aligned} & [T_i^\mathbf{S} \varphi]_{1\dots ii+1\dots N}(k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_N) \\ &= \mathbf{S}_{i,i+1}(k_1, k_{i+1}) \varphi_{1\dots i+1\dots N}(k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_N) \quad , \quad N \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.48})$$

Ici nous avons encore un autre aspect de l'importance de l'équation de Yang-Baxter et de la relation d'unitarité. En effet, ce sont ces relations qui assurent que la définition précédente forme une représentation de \mathfrak{S}_N et que toute la construction qui en découle est cohérente. On montre alors que l'action explicite des opérateurs création et annihilation sur $\mathcal{F}_\mathcal{H}^\mathbf{S} = \mathcal{P}_\mathbf{S} \mathcal{F}_\mathcal{H}$ s'écrit

$$[a(f)\varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) \quad (\text{I.2.2.49})$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{N+1} \int \frac{dk}{2\pi} f_0^\dagger(k) \varphi_{01\dots N}(k, k_1, \dots, k_N) \\ [a^\dagger(f)\varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} f_1(k_1) \varphi_{2\dots N}(k_2, \dots, k_N) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=2}^N \mathbf{S}_{j-1,j}(k_{j-1}, k_j) \dots \mathbf{S}_{1j}(k_1, k_j) \\ &\times f_j(k_j) \varphi_{1\dots \widehat{j} \dots N}(k_1, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_N) \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.50})$$

La dernière étape consiste à identifier les "opérateurs" $a_j(k)$ et $a_j^\dagger(k)$ qui sont en fait des distributions d'opérateurs définies de la façon suivante

$$a(f) = \int \frac{dk}{2\pi} f^{*j}(k) a_j(k) \quad , \quad a^\dagger(f) = \int \frac{dk}{2\pi} a_j^\dagger(k) f_j(k) . \quad (\text{I.2.2.51})$$

On montre alors qu'en tant que distributions d'opérateurs agissant sur l'espace de Fock $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\mathbf{S}}$, $a_j(k)$ et $a^{\dagger j}(k)$ vérifient les relations de l'algèbre ZF

$$a_{\alpha_1}(k_1)a_{\alpha_2}(k_2) = \mathbf{S}_{\alpha_2\alpha_1}^{\beta_2\beta_1}(k_2,k_1)a_{\beta_2}(k_2)a_{\beta_1}(k_1) \quad (\text{I.2.2.52})$$

$$a^{\dagger\alpha_1}(k_1)a^{\dagger\alpha_2}(k_2) = a^{\dagger\beta_2}(k_2)a^{\dagger\beta_1}(k_1)\mathbf{S}_{\beta_2\beta_1}^{\alpha_2\alpha_1}(k_2,k_1) \quad (\text{I.2.2.53})$$

$$a_{\alpha_1}(k_1)a^{\dagger\alpha_2}(k_2) = a^{\dagger\beta_2}(k_2)\mathbf{S}_{\alpha_1\beta_2}^{\beta_1\alpha_2}(k_1,k_2)a_{\beta_1}(k_1) + 2\pi\delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}\delta(k_1 - k_2)\mathbf{1} \quad (\text{I.2.2.54})$$

On peut donc procéder en toute rigueur à la construction des états asymptotiques. Cela se fait à partir d'un vecteur particulier de $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\mathbf{S}}$ appelé le vide et noté Ω et qui vérifie

$$a_j(k)\Omega = 0. \quad (\text{I.2.2.55})$$

Ce vecteur est unique (à une normalisation près) et on prend $\Omega = (1,0,0,\dots)$ pour obtenir un vecteur unitaire. Pour retrouver la notion d'état *in* et *out*, on introduit un ordre (partiel) \succ sur les fonctions "d'habillage" f :

$$f_1 \succ f_2 \Leftrightarrow \forall k_1 \in \text{supp}(f_1), \forall k_2 \in \text{supp}(f_2) \quad , \quad k_1 > k_2. \quad (\text{I.2.2.56})$$

Pour $f_1 \succ \dots \succ f_N$, f_j parcourant \mathcal{H} , on définit les espaces de Fock \mathcal{F}^{in} et \mathcal{F}^{out} à partir des espaces engendrés par les ensembles $\{a^{\dagger}(f_1)\dots a^{\dagger}(f_N)\Omega\}$ et $\{a^{\dagger}(f_N)\dots a^{\dagger}(f_1)\Omega\}$ dont on montre qu'ils sont denses dans $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}^N$. On a donc la complétude asymptotique discutée en toute généralité au début de ce chapitre. Il suffit alors de faire l'identification suivante pour les états *in* et *out*

$$|A_{a_1}(k_1)\dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} = a^{\dagger a_1}(k_1)\dots a^{\dagger a_N}(k_N)\Omega, \quad k_1 > \dots > k_N, \quad (\text{I.2.2.57})$$

$$|A_{b_1}(k'_1)\dots A_{b_M}(k'_M)\rangle_{out} = a^{\dagger b_1}(k'_1)\dots a^{\dagger b_M}(k'_M)\Omega, \quad k'_1 < \dots < k'_M. \quad (\text{I.2.2.58})$$

Une amplitude de transition se calcule alors comme un produit scalaire de fonctions dans $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ et en utilisant les relations de l'algèbre ZF

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle A_{b_1}(k'_1)\dots A_{b_M}(k'_M)|A_{a_1}(k_1)\dots A_{a_N}(k_N)\rangle_{in} = \\ \langle a^{\dagger b_1}(k'_1)\dots a^{\dagger b_M}(k'_M)\Omega, a^{\dagger a_1}(k_1)\dots a^{\dagger a_N}(k_N)\Omega \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.59})$$

En calculant ces amplitudes de transition, on retrouve évidemment toutes les propriétés de la théorie factorisable considérée : absence de production de particules ($N = M$), conservation des impulsions individuelles (caractérisée par la présence de fonction δ) et factorisation en une succession de matrice de diffusion à deux particules. Soulignons enfin que cette représentation de Fock fournit bien des opérateurs création produisant les fonctions d'onde de Bethe (au lieu des ondes planes pour l'algèbre d'oscillateurs non déformée). En effet, dans le cas scalaire, si on note $\tilde{a}^{\dagger}(x)$ la transformée de Fourier de $a(k)$, les définitions (I.2.2.50) et (I.2.2.51) montrent que $\tilde{a}^{\dagger}(x_1)\tilde{a}^{\dagger}(x_2)\Omega$ reproduit (I.1.3.65). Cela conclut notre description de la représentation de Fock de l'algèbre ZF.

I.2.2.3 Opérateurs "bien élevés"

Nous allons terminer cette section sur le rôle que joue cette algèbre dans la construction de hiérarchies intégrables et l'identification de leur algèbre de symétrie. Cela fait appel à la notion d'opérateurs bien élevés introduite par É. Ragoucy dans [108]. Rappelons tout d'abord qu'à toute algèbre ZF \mathcal{A}_S , on peut associer une hiérarchie d'opérateurs $H^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, indépendants et de la forme

$$H^{(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k^p a^{\dagger j}(k) a_j(k). \quad (\text{I.2.2.60})$$

Les relations d'échange de \mathcal{A}_S permettent alors de montrer qu'ils sont en involution

$$[H^{(p)}, H^{(q)}] = 0, \quad p, q \in \mathbb{N} \quad (\text{I.2.2.61})$$

et

$$a_j(k, t) \equiv e^{itH^{(p)}} a_j(k) e^{-itH^{(p)}} = e^{-itk^p} a_j(k) \quad (\text{I.2.2.62})$$

$$a^{\dagger j}(k, t) \equiv e^{itH^{(p)}} a^{\dagger j}(k) e^{-itH^{(p)}} = e^{itk^p} a^{\dagger j}(k). \quad (\text{I.2.2.63})$$

Pour $p = 2$ ces relations montrent que $H^{(2)}$ peut être interprété comme un Hamiltonien et que le système correspondant est intégrable dans le sens où il existe une infinité de quantités conservées indépendantes. En utilisant les représentations de Fock de l'algèbre ZF et en interprétant les éléments $a^{\dagger j}(k)$ comme les opérateurs création d'états asymptotiques, on voit qu'un état à N particules ainsi construit diagonalise $H^{(2)}$ et a une évolution temporelle semblable à celle d'un état à N particules libres. C'est un des points forts de cette approche car en réalité l'interaction entre particule est bien présente et se retrouve dans les relations d'échange de \mathcal{A}_S par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{S} . Notons cependant que la diagonalisation des intégrales du mouvement en terme de l'algèbre \mathcal{A}_S ne dit rien sur leur forme en terme des champs de la théorie correspondante. En effet, il se peut très bien que certaines de ces intégrales ne soient pas locales en terme de ces champs. On définit maintenant la notion d'opérateur vertex et bien élevés en suivant [108].

Définition I.2.2.2 Les opérateurs vertex $T^{ij}(k)$, $i, j = 1, \dots, n$ associés à l'algèbre \mathcal{A}_S d'unité $\mathbf{1}$ sont définis par la donnée de $T_0(k) = E_{ij} \otimes T^{ij}(k) \equiv T^{ij}(k) E_{ij} \in \mathcal{A}_S \otimes \text{End}(\mathbb{C}^n)$ avec

$$T_0(k) = \mathbf{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int \frac{d^m k}{(2\pi)^m} a_{m \dots 1}^{\dagger} T_{01 \dots m}^{(m)}(k, k_1, \dots, k_m) a_{1 \dots m}, \quad (\text{I.2.2.64})$$

où

$$a_{m \dots 1}^{\dagger} = a_m^{\dagger}(k_m) \dots a_1^{\dagger}(k_1), \quad (\text{I.2.2.65})$$

$$a_{1 \dots m} = a_1(k_1) \dots a_m(k_m), \quad (\text{I.2.2.66})$$

et

$$T_{01 \dots m}^{(m)}(k, k_1, \dots, k_m) \in (\text{End}(\mathbb{C}^n))^{\otimes(m+1)}(k, k_1, \dots, k_m). \quad (\text{I.2.2.67})$$

Tout comme dans l'équation de Yang-Baxter écrite en espaces auxiliaires, il faut sommer sur les indices correspondants aux espaces auxiliaires répétés. Pour obtenir les résultats intéressants sur la structure de la symétrie de la hiérarchie associée à \mathcal{A}_S , nous avons besoin de la notion d'opérateurs bien élevés. Ce sont des éléments d'une extension de \mathcal{A}_S (voir [90]) définis de telle manière qu'ils commutent avec la hiérarchie. Ils engendrent donc la symétrie de la hiérarchie. Le point intéressant est que si on les prend de la forme "vertex", il est possible d'identifier la structure de l'algèbre de symétrie.

Définition I.2.2.3 *Un opérateur $L(k)$ est dit bien élevé s'il satisfait*

$$L_1(k_1) a_2(k_2) = \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1) a_2(k_2) L_1(k_1) , \quad (\text{I.2.2.68})$$

$$L_1(k_1) a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2) \mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) L_1(k_1) . \quad (\text{I.2.2.69})$$

Le résultat fondamental de [108] est que *l'algèbre de symétrie de la hiérarchie* engendrée par un opérateur $L(k)$ bien élevé et de type vertex a une *structure de groupe quantique* dont les relations de définition sont de la forme FRT [44] (voir le chapitre suivant). Cela s'écrit

$$[L(k), H^{(p)}] = 0 , \quad \forall p \in \mathbb{N} , \quad (\text{I.2.2.70})$$

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) L_1(k_1) L_2(k_2) = L_2(k_2) L_1(k_1) \mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) . \quad (\text{I.2.2.71})$$

Cette construction est très générale car elle ne suppose que l'unitarité de la matrice \mathbf{S} et l'équation de Yang-Baxter. Tout le "jeu" ensuite consiste à montrer que l'Hamiltonien $H^{(2)}$ correspond à l'Hamiltonien du système physique considéré. Cela se fait explicitement pour l'équation de Schrödinger non-linéaire où l'on retrouve rapidement le fait que le Yangien (de $gl(n)$ pour un champ vectoriel à n degrés internes) est algèbre de symétrie du modèle. Dans [108], des arguments sont avancés en faveur de conclusions similaires pour sine-Gordon et le modèle XYZ. Dans la dernière partie de ce manuscrit, nous verrons une utilisation explicite de cette stratégie dans le cadre d'une version supersymétrique de Schrödinger non-linéaire.

I.2.3 Inclusion d'un bord

La présentation de la section précédente concerne des théories factorisables définies sur toute la ligne. Dans cette section, on se pose la question de l'effet d'un bord, voire deux si l'on veut décrire un système de taille finie, sur la factorisabilité et l'intégrabilité de la théorie. Intuitivement, on se doute que l'ajout d'une perturbation quelconque dans le système a des conséquences profondes (modification du spectre, présence d'états liés au bord, etc.) qui peuvent aller jusqu'à la perte de l'intégrabilité du système, avec de fortes chances que la factorisabilité soit perdue également. L'optique choisie ici est donc se placer d'emblée dans un système intégrable et de se demander quelles sont les perturbations permises qui conservent cette intégrabilité.

Imaginons un problème sur la demi-ligne, c'est-à-dire qu'on suppose que le bord est présent à un endroit fixe que l'on peut prendre comme origine. Les particules de la théorie sur la demi-ligne interagissent entre elles et aussi maintenant avec le bord. Typiquement, si on imagine que la demi-ligne va de $-\infty$ à 0 (là où est le bord) alors un état *in* correspond à des particules dont les impulsions vérifient $k_1 > \dots > k_N > 0$. La restriction sur le signe traduit ici le fait que les particules partent de $-\infty$ et se dirigent vers le bord ("vers la droite"). L'interaction avec le bord correspond à une réflexion (avec un changement possible dans le type de particule et dans les degrés internes du bord) et se traduit donc par un changement de signe de l'impulsion $k \rightarrow -k$. Un état *out* correspond alors à $-k_1 < \dots < -k_N < 0$.

Rappelons que l'on se place dans le cadre d'une théorie intégrable. L'argumentation de Parke présentée dans la section I.2.1 est encore valable en présence du bord. On en déduit qu'un processus global à N particules va se décomposer en une succession de processus à deux particules et de processus à une particule avec le bord. C'est précisément ce qui est décrit dans le papier de I. Cherednik [28] qui a établi les relations de contraintes sur la matrice de diffusion à deux particules et la matrice *de réflexion* caractérisant l'interaction entre une particule et le bord provenant de la factorisation. On retrouve bien sûr l'équation de Yang-Baxter et celle-ci est complétée par *l'équation de réflexion*. D'après la section précédente, il est tentant de recourir à une présentation algébrique de la situation. Deux approches ont été développées et nous commençons par présenter la plus ancienne, discutée par exemple dans [51] ou [57], qui étend de façon intuitive l'algèbre de Zamolodchikov. La plus récente, introduite par M. Mintchev *et al.* dans [84], fut introduite comme une alternative plus rigoureuse produisant les mêmes équations physiques (celles proposées par Cherednik) mais permettant de développer naturellement un programme de seconde quantification d'une théorie avec bord grâce à une construction explicite des représentations de Fock associées à l'algèbre.

I.2.3.1 Opérateur de bord

L'idée de la première approche est d'introduire un opérateur de bord B_i représentant le bord (ce serait un "opérateur création de bord" [57]) avec éventuellement des degrés internes indexés par i . Dans cette approche, le bord est vu comme une particule de la théorie qui serait infiniment massive, donc immobile et d'impulsion nulle. D'ailleurs dans [51], la notation $A_a(k)$ de Zamolodchikov est conservée et l'opérateur de bord est noté $A_i(0)$. C'est un peu trompeur cependant car, partant de (I.2.2.15), on est tenté d'écrire

$$A_{a_1}(k_1)A_i(0) = \mathcal{R}_{ia_1}^{jb_1}(0,k_1)A_j(0)A_{b_1}(k_1), \quad (\text{I.2.3.72})$$

\mathcal{R} étant la matrice de diffusion correspondant à l'interaction entre une particule et le bord. Or, si on imagine une théorie sur la demi-ligne $] -\infty, 0]$, un état asymptotique *in* à une particule a une impulsion positive k_1 qui est complètement réfléchi lors de l'interaction avec le bord d'impulsion 0. Ainsi,

l'état *in* du système {particule+bord} est caractérisé par $k_1 > 0$ et l'état *out* par $-k_1 < 0$. D'après les conventions utilisées précédemment, on en déduit qu'au niveau algébrique les éléments correspondants à la particule et au bord ne sont pas échangés et que l'impulsion de l'élément représentant la particule doit être remplacée par son opposée. L'opérateur de bord est donc bel et bien un objet différent (dont la nature précise reste un problème ouvert) des opérateurs de l'algèbre de Zamolodchikov et c'est pourquoi nous préférons le noter B_i . La relation algébrique codant l'interaction particule-bord s'écrit alors [51, 57]

$$A_{a_1}(k_1)B_i = \mathcal{R}_{a_1 i}^{b_1 j}(k_1)A_{b_1}(-k_1)B_j. \quad (\text{I.2.3.73})$$

Les différents indices de la matrice de réflexion \mathcal{R} rendent compte de la possibilité de changement de type de particules et d'excitation de degrés internes du bord pendant l'interaction. Dès lors, il est facile de coder algébriquement toutes les propriétés de factorisabilité des processus et les contraintes sur les matrices \mathbf{S} et \mathcal{R} comme précédemment. En appliquant deux fois (I.2.3.73), on obtient immédiatement

$$\mathcal{R}_{a_1 i}^{b_1 j}(k)\mathcal{R}_{b_1 j}^{c_1 k}(-k) = \delta_{a_1}^{c_1}\delta_i^k, \quad (\text{I.2.3.74})$$

qui est l'analogue de la relation d'unitarité (I.2.2.16). En utilisant les espaces auxiliaires, on peut récrire cette relation sous la forme

$$\mathcal{R}_{1\infty}(k)\mathcal{R}_{1\infty}(-k) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (\text{I.2.3.75})$$

où l'espace noté ∞ correspond aux degrés internes du bord. Tout comme pour la matrice de diffusion, on obtient l'unitarité physique pour la matrice de réflexion en imposant la condition d'analyticité hermitienne

$$\mathcal{R}_{1\infty}^\dagger(k) = \mathcal{R}_{1\infty}(-k). \quad (\text{I.2.3.76})$$

Un état *in* à N particules correspond à une suite de symboles de la forme $A_{a_1}(k_1)\dots A_{a_N}(k_N)B_i$ avec $k_1 > \dots > k_N > 0$ et en utilisant les relations (I.2.2.15) et (I.2.3.73), on obtient $A_{b_1}(-k_1)\dots A_{b_N}(-k_N)B_j$ avec $-k_1 < \dots < -k_N < 0$ correspondant à l'état *out*. Le facteur numérique qui apparaît n'est autre que la matrice de diffusion $\mathbf{S}_{\mathcal{R}}$ pour le processus et elle se factorise en en sous-matrice \mathbf{S} et \mathcal{R} :

$$A_{a_1}(k_1)\dots A_{a_N}(k_N)B_i = (\mathbf{S}_{\mathcal{R}})_{a_N\dots a_1 i}^{b_1\dots b_N j}(k_N, \dots, k_1)A_{b_1}(-k_1)\dots A_{b_N}(-k_N)B_j.$$

L'associativité pour trois particules interagissant entre elles bien avant ou bien après l'interaction avec le bord redonne l'équation de Yang-Baxter pour la matrice de diffusion à deux particules. La nouveauté provient de l'associativité pour un processus impliquant deux particules et le bord. Les différentes façons d'envisager la succession de processus conduisent à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(k_1, k_2)\mathcal{R}_{b_2 i}^{c_2 j}(k_2)\mathbf{S}_{c_2 b_1}^{d_2 c_1}(-k_2, k_1)\mathcal{R}_{c_1 j}^{d_1 k}(k_1) \\ &= \mathcal{R}_{a_1 i}^{b_1 j}(k_1)\mathbf{S}_{b_1 a_2}^{c_1 b_2}(-k_1, k_2)\mathcal{R}_{b_2 j}^{c_2 k}(k_2)\mathbf{S}_{c_2 c_1}^{d_2 d_1}(-k_2, -k_1). \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.77})$$

C'est *l'équation de réflexion* : elle contraint les types de bord possibles préservant l'intégrabilité pour une théorie intégrable de matrice de diffusion à deux particules donnée. L'ensemble de ces deux équations constitue le point de départ des études de systèmes intégrables avec bord et furent établies originellement dans [28]. Notons également la contribution fondamentale de E. Sklyanin [120] dans le programme de diffusion inverse quantique pour des systèmes de tailles finies. Les indices de type i, j sont différents de ceux du type a, b . Ils correspondent aux degrés internes éventuels du bord et parcourent $1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ où $n_{\mathcal{R}}$ est a priori différent de n . La matrice \mathbf{S} agit trivialement dans l'espace correspondant et ne porte donc pas explicitement ces indices dans l'équation de réflexion.

Tout comme dans le cas de la ligne infinie, la matrice à deux particules et la matrice de réflexion deviennent les objets centraux à déterminer afin de caractériser complètement la matrice de diffusion totale en présence d'un bord. Il apparaît que les équations de Yang-Baxter et de réflexion ne permettent pas une détermination univoque dans tous les cas et les propriétés de symétrie de croisement ainsi que le programme dit de "bootstrap" ont été adaptés au cas avec bord afin d'obtenir plus d'information (voir par exemple [57, 51]). Nous n'irons cependant pas plus loin dans cette direction, les équations déjà obtenues étant suffisantes dans le cadre de ce manuscrit.

I.2.3.2 Algèbre de bord

L'approche que nous allons présenter maintenant est motivée par le fait, admis par les auteurs de [57] eux-mêmes, que l'approche avec l'opérateur de bord reste formelle. En outre, elle ne permet pas d'adapter la méthode de diffusion inverse quantique développée pour l'équation de Schrödinger non-linéaire [43] au cas avec bord. Evidemment, il faut garder à l'esprit que les objets physiques d'importance sont la matrice de diffusion à deux particules et la matrice de réflexion et les équations qui les contraignent. Partant de là, tout formalisme algébrique ayant pour but de décrire une théorie factorisable en présence d'un bord se doit de contenir ces objets et de reproduire ces équations. *L'algèbre de bord* introduite par Mintchev *et al.* dans [84] remplit ces conditions et permet une construction explicite des représentations de Fock. Dans ce contexte, la construction des états asymptotiques n'est plus formelle et le calcul de la matrice de diffusion totale est explicite. L'algèbre de bord se substitue naturellement à l'algèbre ZF dans la quantification de systèmes intégrables (voir [84, 53]).

Au niveau du formalisme, il s'agit toujours d'introduire un nouvel élément qui caractérise le bord dans l'algèbre ZF de départ. Cependant, au lieu de voir le bord comme une particule infiniment massive, ce qui donne les relations très intuitives (I.2.3.73), l'idée est de caractériser le bord uniquement par ses effets de diffusion sur les particules de la théorie. L'élément algébrique associé ne représente donc pas un opérateur "de création de bord" mais directement la matrice de réflexion, le lien se faisant via une représentation de Fock.

Cela a une conséquence fondamentale sur la structure de l'algèbre. L'algèbre de bord notée \mathcal{B}_S est une algèbre associative d'élément unité $\mathbf{1}$ contenant deux types de générateurs : les générateurs $a_i(k)$ et $a^{\dagger j}(k)$, $k \in \mathbb{R}$ de type ZF et les générateurs de bord $r_i^j(k)$. Remarquons que les indices i, j choisis ici correspondent aux indices a, b précédemment utilisés et parcourent les degrés internes $1, \dots, n$. Nous abandonnons la notation a, b pour des raisons évidentes de conflit avec les générateurs $a(k)$. Nous remarquons aussi que $r_i^j(k)$ ne contient pas d'indices correspondants à l'espace de symétrie interne éventuel du bord et que pour rendre compte de cette possibilité, il suffit d'imaginer que chaque générateur $r_i^j(k)$ est une matrice d'éléments $(r_i^j)_{\alpha}^{\beta}(k)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$.

Cela étant dit, les relations de définition de \mathcal{B}_S s'écrivent en notation d'espaces auxiliaires

$$a_1(k_1)a_2(k_2) = \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)a_2(k_2)a_1(k_1) \quad (\text{I.2.3.78})$$

$$a_1^{\dagger}(k_1)a_2^{\dagger}(k_2) = a_2^{\dagger}(k_2)a_1^{\dagger}(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1) \quad (\text{I.2.3.79})$$

$$\begin{aligned} a_1(k_1)a_2^{\dagger}(k_2) &= a_2^{\dagger}(k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)a_1(k_1) + 2\pi\delta_{12}\delta(k_1 - k_2)\mathbf{1} \\ &+ 2\pi r_{12}(k_1)\delta(k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.80})$$

où l'on a introduit

$$r_{12}(k) = \sum_{i,j=1}^n r_i^j(k) (e_i \otimes e_j^{\dagger}) \equiv \delta_{12}r_2(k) \equiv r_1(k)\delta_{12}. \quad (\text{I.2.3.81})$$

Ce premier groupe de relations est directement inspiré de l'algèbre ZF mais nous notons la différence majeure dans la troisième relation où apparaît le générateur de bord. D'ailleurs, le cas sans bord correspondant à $r(k) = 0$ redonne l'algèbre ZF. Ce premier groupe de relations est accompagné de deux autres groupes assurant la cohérence de l'algèbre

$$a_1(k_1)r_2(k_2) = \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)r_2(k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, -k_2)a_1(k_1) \quad (\text{I.2.3.82})$$

$$r_1(k_1)a_2^{\dagger}(k_2) = a_2^{\dagger}(k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, -k_1), \quad (\text{I.2.3.83})$$

et

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, -k_1)r_2(k_2) \\ &= r_2(k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, -k_2)r_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(-k_2, -k_1). \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.84})$$

Dans la suite nous imposerons une relation supplémentaire correspondant à la relation d'unitarité pour le générateur de bord

$$r(k)r(-k) = \mathbf{1}. \quad (\text{I.2.3.85})$$

Dans ce cas, on appellera $r(k)$ générateur de réflexion. Cette structure peut paraître bien compliquée comparée à (I.2.3.73) mais elle permet de construire les représentation de Fock assez naturellement comme nous allons le voir.

La relation (I.2.3.84) rappelle l'équation de réflexion qui, avec (I.2.3.74), contraint la matrice de réflexion représentant le bord. Mais dans le cas présent, (I.2.3.84) et (I.2.3.85) ne contraignent pas une matrice mais sont des relations définissant une sous-algèbre de l'algèbre de bord appelée *algèbre de réflexion*.

Définition I.2.3.1 *L'algèbre de réflexion est la sous-algèbre de l'algèbre de bord engendrée par $r(k)$ satisfaisant les relations de définition*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) r_1(k_1) \mathbf{S}_{21}(k_2, -k_1) r_2(k_2) \\ = r_2(k_2) \mathbf{S}_{12}(k_1, -k_2) r_1(k_1) \mathbf{S}_{21}(-k_2, -k_1). \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.86})$$

$$r(k) r(-k) = \mathbf{1}. \quad (\text{I.2.3.87})$$

Cette algèbre présente un intérêt en elle-même [120] et fut étudiée en détail dans [96] pour une matrice \mathbf{S} particulière.

Les représentations de Fock de l'algèbre de bord ont été étudiées dans [84] et la construction suit les étapes détaillées dans la section I.2.2. La différence fondamentale est l'utilisation d'un projecteur différent pour tenir compte de la présence de réflexion. Il est basé sur le groupe de Weyl \mathfrak{W}_N associé à l'algèbre de Lie B_N de générateurs T_i , $i = 1, \dots, N-1$ et R . Les T_i sont les générateurs du groupe des permutations \mathfrak{S}_N et vérifient ses relations de définition (I.2.2.42-I.2.2.44) et R est le générateur correspondant aux réflexions et vérifie

$$R R = \mathbf{1} \quad , \quad R T_j = T_j R \quad , \quad j = 1, \dots, N-2 \quad (\text{I.2.3.88})$$

$$R T_{N-1} R T_{N-1} = T_{N-1} R T_{N-1} R \quad (\text{I.2.3.89})$$

On représente maintenant ces générateurs sur \mathcal{H}^N . Pour les T_i , on conserve la représentation $T_i^{\mathbf{S}}$, $i = 1, \dots, N-1$ défini par (I.2.2.48) tandis que la représentation de R fait appel à la matrice de réflexion \mathcal{R}

$$[T_N^{\mathbf{S}} \varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) = \mathcal{R}_N(k_N) \varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_{N-1}, -k_N) \quad , \quad N \geq 1 \quad (\text{I.2.3.90})$$

Ici ce sont les relations d'unitarité (pour \mathbf{S} et \mathcal{R}), l'équation de Yang-Baxter et l'équation de réflexion qui assurent que $T_i^{\mathbf{S}}$, $i = 1, \dots, N$ forment une représentation de \mathfrak{W}_N sur \mathcal{H}^N . Le projecteur (à N particules) permettant de dérouler toute la construction comme précédemment s'écrit alors

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}, \mathcal{R}}^N = \frac{1}{2^N N!} \sum_{P \in \mathfrak{W}_N} T_P^{\mathbf{S}}. \quad (\text{I.2.3.91})$$

Les opérateurs création et annihilation sont définis en suivant exactement la même procédure que pour l'algèbre ZF en utilisant $\mathcal{P}_{\mathbf{S}, \mathcal{R}}$ à la place de $\mathcal{P}_{\mathbf{S}}$, ce qui a pour effet de modifier l'expression explicite de l'action de $a^\dagger(f)$ (voir

[84] pour plus de détails). Il reste à préciser la façon dont on représente $r(k)$ sur cet espace de Fock :

$$\begin{aligned} [r_0(k)\varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) &= \mathbf{S}_{01}(k, k_1) \dots \mathbf{S}_{0N}(k, k_N) \mathcal{R}_0(k) \\ &\times \mathbf{S}_{N0}(k_N, -k) \dots \mathbf{S}_{10}(k_1, -k) \varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N). \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.92})$$

En particulier pour $N = 0$, on a le lien direct entre le générateur de réflexion et la matrice de réflexion [84]

$$r(k)\Omega = \mathcal{R}(k)\Omega. \quad (\text{I.2.3.93})$$

A ce niveau, on comprend comment l'équation de réflexion est reproduite dans ce formalisme : elle est le résultat de l'action de l'algèbre de réflexion (I.2.3.84) sur le vide. Et la relation d'unitarité pour la matrice de réflexion est obtenue de la même façon à partir de (I.2.3.85). On montre alors que les distributions d'opérateurs $a_j(k)$, $a^{\dagger j}(k)$ et $r_{ij}(k)$ ainsi représentées vérifient toutes les relations de l'algèbre de bord. Dès lors, la théorie asymptotique suit les mêmes lignes que dans le cas de l'algèbre ZF. L'espace $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{in}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{out}$) dense dans $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ est construit à partir des espaces $\{a^{\dagger}(f_1) \dots a^{\dagger}(f_N) \mid f_i \in \mathcal{H}\}$ avec $f_1 \succ \dots \succ f_N \succ 0$ (resp. $0 \succ f_N \succ \dots \succ f_1$). Les états asymptotiques formels comprenant l'opérateur de bord B sont représentés ici par

$$\begin{aligned} |A_{a_1}(k_1) \dots A_{a_N}(k_N) B\rangle_{in} &= a^{\dagger a_1}(k_1) \dots a^{\dagger a_N}(k_N) \Omega, \quad k_1 > \dots > k_N > 0, \\ |A_{b_1}(k'_1) \dots A_{b_M}(k'_M) B\rangle_{out} &= a^{\dagger b_1}(k'_1) \dots a^{\dagger b_M}(k'_M) \Omega, \quad k'_1 < \dots < k'_M < 0. \end{aligned}$$

Le calcul des amplitudes de transition semble ne pas faire intervenir l'opérateur de réflexion $r(k)$ d'après l'identification précédente mais il ne faut pas oublier que celui-ci est présent dans la relation d'échange entre $a_j(k)$ et $a^{\dagger j}(k')$. Encore une fois, l'utilisation de la représentation de Fock de l'algèbre de bord reproduit les propriétés attendues d'une théorie factorisable en présence d'un bord, comme spécifié par Cherednik (voir [84] pour des exemples précis). En particulier, la matrice de diffusion à N particules se réduit bien à un produit de matrices \mathbf{S} et \mathcal{R} .

Terminons cette section sur l'utilisation de l'algèbre de bord dans le programme de diffusion inverse quantique appliqué à l'équation de Schrödinger non-linéaire en présence d'un bord. Nous avons déjà dit que l'algèbre ZF apparaît naturellement dans ce programme [43] sur la ligne (cela sera présenté plus en détail dans la deuxième partie de ce manuscrit) et il a été montré qu'il est possible de construire une version quantique de la solution de R.R. Rosales [113] pour Schrödinger non-linéaire [32, 45, 60, 117, 125] (voir aussi [62] pour une revue détaillée). Il se trouve que cette construction reste valable dans le cas avec bord pourvu que l'on remplace l'algèbre ZF par l'algèbre de bord dans ce cas [53]. Autrement dit, on a une expression explicite du champ quantique satisfaisant l'équation d'évolution de Schrödinger non-linéaire en fonction des opérateurs création et annihilation de l'algèbre de bord. Cela permet en particulier de calculer de façon exacte les fonctions de corrélation

pour le champ local à tout instant t . Nous notons également que la notion d'opérateurs bien élevés intervient dans les théories avec bord et permet de faire le lien entre l'algèbre ZF et l'algèbre de bord, généralisant les résultats de symétrie pour la hiérarchie intégrable associée (voir [107]).

I.2.4 Inclusion d'un défaut

La généralisation naturelle de la section précédente correspond au cas où le bord n'est plus purement réflexif mais transmet également une partie des particules qui interagissent avec lui. Si on imagine toujours un bord fixe dans l'espace, on revient à une théorie sur toute la ligne mais avec un *défaut* ou encore une *impureté* située à l'origine. L'idée est alors de caractériser la transmission par une matrice et tout comme dans l'approche précédente, la question est de savoir quels types de transmission (et de réflexion) sont autorisés si l'on souhaite maintenir la factorisabilité de la théorie considérée. Encore une fois, deux approches ont été élaborées pour répondre à cette question et chacune est la généralisation directe de l'approche correspondante de la section précédente. Notre description sera donc succincte. En outre, ce sujet est encore une source de recherches intensives actuellement et nous aurons l'occasion de revenir plus en profondeur sur ces questions dans la troisième partie de ce manuscrit car une bonne partie de mes travaux a été consacrée à ce sujet.

I.2.4.1 Opérateur de défaut

Revenons sur l'approche originelle développée par G. Delfino, G. Mussardo et P. Simonetti dans [36, 37], que nous appellerons approche DMS dans la suite. Elle correspond à la généralisation du concept de l'opérateur de bord B_j de la section précédente. On imagine que le défaut est une particule infiniment massive et immobile à laquelle on associe un *opérateur de défaut* D_j . Il s'agit alors de préciser comment cet opérateur "parle" aux générateurs de l'algèbre ZF. On imagine que le défaut n'est a priori pas invariant sous parité. En d'autres termes, les matrices qui caractérisent l'interaction d'une particule venant de la droite ou de la gauche par rapport au défaut ne sont pas les mêmes (voir par exemple [24]). Soient $R(k)$, $\tilde{R}(k)$ et $T(k)$, $\tilde{T}(k)$ les matrices de réflexion et de transmission correspondantes. En utilisant la notation d'espaces auxiliaires, l'*algèbre de défaut* [36, 37] correspond à l'algèbre ZF pour les générateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$ complétée par les relations suivantes

$$a_1^\dagger(k)\mathcal{D}_\infty = a_1^\dagger(-k)\mathcal{D}_\infty R_{1\infty}(k) + \mathcal{D}_\infty a_1^\dagger(k)T_{1\infty}(k), \quad (\text{I.2.4.94})$$

$$\mathcal{D}_\infty a_1^\dagger(k) = \mathcal{D}_\infty a_1^\dagger(-k)\tilde{R}_{1\infty}(k) + a_1^\dagger(k)\mathcal{D}_\infty \tilde{T}_{1\infty}(k). \quad (\text{I.2.4.95})$$

L'espace auxiliaire noté ∞ traduit la possibilité de degrés de liberté interne pour le défaut. Dans la suite néanmoins, nous n'aurons pas recours explici-

tement à ces degrés internes car ils ne seront pas utiles dans nos discussions. Notons qu'il est très facile de les rajouter à n'importe quel moment dans ce formalisme. La cohérence de ces relations débouche sur les *relations d'unitarité* pour les matrices de réflexion et de transmission. Ces relations sont la généralisation naturelle de (I.2.3.85) dans le cas où il y a également transmission.

$$R(-k)R(k) + \tilde{T}(k)T(k) = \mathbb{I}, \quad (\text{I.2.4.96})$$

$$\tilde{R}(k)T(k) + T(-k)R(k) = 0. \quad (\text{I.2.4.97})$$

Les conditions d'analyticité hermitienne prennent la forme suivante

$$R^\dagger(k) = R(-k) \quad , \quad \tilde{R}^\dagger(k) = \tilde{R}(-k) \quad , \quad T^\dagger(k) = \tilde{T}(k). \quad (\text{I.2.4.98})$$

Cela permet d'écrire le reste des relations de l'algèbre de défaut

$$a_1(k)\mathcal{D} = R_1(-k)a_1(-k)\mathcal{D} + \tilde{T}_1(k)\mathcal{D}a_1(k), \quad (\text{I.2.4.99})$$

$$\mathcal{D}a_1(k) = \tilde{R}_1(-k)\mathcal{D}a_1(-k) + T_1(k)a_1(k)\mathcal{D}. \quad (\text{I.2.4.100})$$

L'étape suivante est d'invoquer l'associativité dans cette algèbre pour obtenir les équations de factorisation contraignant les matrices de réflexion et de transmission pour une matrice de diffusion donnée. On obtient trois jeux d'équations indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)R_1(-k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, -k_1)R_2(-k_2) \\ = R_2(-k_2)\mathbf{S}_{12}(k_1, -k_2)R_1(-k_1)\mathbf{S}_{21}(-k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.101})$$

$$T_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)R_2(-k_2) = R_2(-k_2)T_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(-k_2, k_1), \quad (\text{I.2.4.102})$$

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)T_1(k_1)T_2(k_2) = T_2(k_2)T_1(k_1)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2), \quad (\text{I.2.4.103})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)\tilde{R}_1(-k_1)\mathbf{S}_{12}(-k_1, k_2)\tilde{R}_2(-k_2) \\ = \tilde{R}_2(-k_2)\mathbf{S}_{21}(-k_2, k_1)\tilde{R}_1(-k_1)\mathbf{S}_{12}(-k_1, -k_2), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.104})$$

$$\tilde{T}_1(k_1)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)\tilde{R}_2(-k_2) = \tilde{R}_2(-k_2)T_1(k_1)\mathbf{S}_{12}(k_1, -k_2), \quad (\text{I.2.4.105})$$

$$\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2)\tilde{T}_1(k_1)\tilde{T}_2(k_2) = \tilde{T}_2(k_2)\tilde{T}_1(k_1)\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2), \quad (\text{I.2.4.106})$$

$$R_1(k_1)\tilde{R}_2(k_2) = \tilde{R}_2(k_2)R_1(k_1), \quad (\text{I.2.4.107})$$

$$\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)T_1(k_1)\tilde{R}_2(-k_2) = \tilde{R}_2(-k_2)\mathbf{S}_{21}(-k_2, k_1)T_1(k_1), \quad (\text{I.2.4.108})$$

$$\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)\tilde{T}_2(k_2)R_1(-k_1) = R_1(-k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, -k_1)\tilde{T}_2(k_2), \quad (\text{I.2.4.109})$$

$$T_1(k_1)\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)\tilde{T}_2(k_2) = \tilde{T}_2(k_2)\mathbf{S}_{21}(k_2, k_1)T_1(k_1). \quad (\text{I.2.4.110})$$

Pour le cas particulier où $\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) = \mathbf{S}_{12}(k_1 - k_2)$, ces équations sont les *équations de réflexion-transmission de l'approche DMS*. On reconnaît l'équation de réflexion pour les matrices de réflexion $R(-k)$ et $\tilde{R}(-k)$ (avec $\mathbf{S}_{12} \leftrightarrow \mathbf{S}_{21}$ dans ce dernier cas). Les autres équations rendent compte de la

factorisation lorsque réflexion et transmission sont mêlées ou lorsqu'il n'y a que de la transmission. On remarque que lorsqu'il n'y a pas de degrés internes pour le défaut (ce qui est le cas ici), la première équation du troisième jeu n'impose aucune contrainte supplémentaire sur R et \tilde{R} . Ces équations traduisent les propriétés de factorisation d'une théorie dont les interactions entre particules sont décrites par \mathbf{S} en présence d'un défaut (ou d'une impureté) qui réfléchit et transmet. Dans le cas particulier de l'approche DMS, elles sont à la base de l'étude menée dans [36, 37] et aussi dans [24] dont la conclusion essentielle est assez restrictive : en l'absence de degrés internes pour l'impureté, la présence de réflexion et de transmission dans un système intégrable conduit à une matrice de diffusion constante. Hormis quelques modèles particuliers (du type Federbush), cette conclusion ne permet d'envisager que l'étude de modèles de bosons ou de fermions *libres* si l'on souhaite inclure une impureté en toute généralité. En revanche, si on considère un défaut purement transmittif par exemple, on peut envisager des interactions. Un tel cas a été considéré par exemple dans [18] pour le modèle Toda affine au niveau classique.

Nous verrons dans la section suivante que cette limitation a été une des motivations pour l'introduction du concept d'algèbre Réflexion-Transmission (RT). Enfin, nous verrons dans la troisième partie de ce manuscrit que cet ensemble d'équations peut se récrire naturellement sous la forme des équations de réflexion-transmission de l'approche RT qui constitue le thème de la prochaine section.

I.2.4.2 Algèbre de Réflexion-Transmission

Tout comme dans le cas avec bord, les équations de réflexion-transmission sont les objets centraux du problème physique. Partant de là, tout formalisme algébrique capable de les reproduire de façon cohérente est un candidat potentiel. Le choix du candidat se fait ensuite sur des critères plus ou moins objectifs : déduction à partir de principes premiers, postulats, cadre plus général, etc. Dans le cas avec bord, nous avons vu que les deux approches reproduisent l'équation de réflexion introduite par I. Cherednik et donc du point de vue des quantités physiques, on ne peut pas vraiment trancher. L'utilisation de l'une ou l'autre approche dépend alors de ce que l'on recherche.

Nous allons présenter *l'algèbre de Réflexion-Transmission*, ou algèbre RT, en suivant la même présentation que pour l'algèbre ZF et l'algèbre de bord. Nous tenons cependant à préciser que ce choix est uniquement motivé par un souci de cohérence par rapport aux sections précédentes et ne rend pas vraiment compte de la situation. Dans la troisième partie de ce manuscrit, nous adopterons un autre point de vue motivé par la physique et éclairé par les résultats récents de l'article [VII]. Ce point de vue permettra de comprendre la relation entre l'approche DMS et celle présentée ici que nous appellerons *approche RT*.

On peut introduire la notion d'algèbre RT en partant de la même idée qui avait conduit à l'algèbre de bord : le défaut (ou l'impureté) n'est plus vu comme une particule infiniment massive de la théorie mais va être caractérisé par ses propriétés de diffusion *i.e.* ici ses propriétés de réflexion et de transmission. Ainsi, en plus du générateur de réflexion $r(k)$, on introduit ici un générateur de transmission $t(k)$.

Définition I.2.4.1 *L'algèbre RT est l'algèbre associative d'unité $\mathbf{1}$ engendrée par les générateurs $a(k)$, $a^\dagger(k)$, $r(k)$ et $t(k)$ vérifiant les relations de définition suivantes*

$$a_1(k_1)a_2(k_2) = \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1)a_2(k_2)a_1(k_1) \quad (\text{I.2.4.111})$$

$$a_1^\dagger(k_1)a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)a_1^\dagger(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, k_1) \quad (\text{I.2.4.112})$$

$$\begin{aligned} a_1(k_1)a_2^\dagger(k_2) &= a_2^\dagger(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)a_1(k_1) + 2\pi\delta_{12}\delta(k_1 - k_2)\mathbf{1} \\ &\quad + 2\pi r_{12}(k)\delta(k_1 + k_2) + 2\pi t_{12}(k)\delta(k_1 - k_2) \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.113})$$

$$a_1(k_1)r_2(k_2) = \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1)r_2(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, -k_2)a_1(k_1), \quad (\text{I.2.4.114})$$

$$r_1(k_1)a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1), \quad (\text{I.2.4.115})$$

$$a_1(k_1)t_2(k_2) = \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1)t_2(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)a_1(k_1), \quad (\text{I.2.4.116})$$

$$t_1(k_1)a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)t_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, k_1), \quad (\text{I.2.4.117})$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1)r_2(k_2) \\ &= r_2(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, -k_2)r_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(-k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.118})$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1)t_2(k_2) \\ &= t_2(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)r_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.119})$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)t_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, k_1)t_2(k_2) \\ &= t_2(k_2)\mathcal{S}_{12}(k_1, k_2)t_1(k_1)\mathcal{S}_{21}(k_2, k_1). \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.120})$$

et

$$r(k)r(-k) + t(k)t(k) = \mathbf{1} \quad , \quad r(k)t(-k) + t(k)r(k) = 0, \quad (\text{I.2.4.121})$$

Les cinq dernières relations définissent une sous-algèbre de l'algèbre RT que nous appelons *algèbre d'impureté*. C'est l'analogue de l'algèbre de réflexion lorsqu'on inclut le générateur de transmission. D'ailleurs, en mettant celui-ci à 0 on retrouve l'algèbre de bord et aussi l'algèbre de réflexion. A l'heure actuelle, il n'y a pas d'étude équivalente à [96] pour l'algèbre d'impureté mais certains résultats ont déjà été obtenus dans [90]. Encore une fois, le lien entre l'algèbre d'impureté et les équations de réflexion-transmission produites par l'approche RT va se faire via les représentations de Fock de l'algèbre RT. Ces dernières ont été étudiées dans [92] et la construction suit les étapes déjà présentées dans les sections précédentes. Le point important à noter est

que le groupe sous-jacent est toujours \mathfrak{W}_N . La seule différence réside dans la représentation sur \mathcal{H}^N du générateur R :

$$\begin{aligned} [T_N^{\mathbf{S}}\varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) &= \mathcal{R}_N(k_N)\varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_{N-1}, -k_N) \\ &+ \mathcal{T}_N(k_N)\varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) \quad , \quad N \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.122})$$

On vérifie alors que les opérateurs $T_i^{\mathbf{S}}$, $i = 1, \dots, N$ forment une représentation de \mathfrak{W}_N sur \mathcal{H}^N . On peut alors introduire le projecteur $\mathcal{P}_{\mathbf{S}, \mathcal{R}, \mathcal{T}}$ à partir de

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}, \mathcal{R}, \mathcal{T}}^N = \frac{1}{2^N N!} \sum_{P \in \mathfrak{W}_N} T_P^{\mathbf{S}}, \quad (\text{I.2.4.123})$$

et travailler sur l'espace de Fock $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{R}, \mathcal{T}}$ obtenu par projection. Sur cet espace, les opérateurs création et annihilation sont définis comme dans (I.2.2.47) à partir de $\mathcal{P}_{\mathbf{S}, \mathcal{R}, \mathcal{T}}$ (l'expression explicite dans le cas scalaire se trouve dans l'article [V]). L'opérateur correspondant à la réflexion reste défini par (I.2.3.92) tandis que l'opérateur de transmission est représenté par

$$\begin{aligned} [t_0(k)\varphi]_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N) &= \mathbf{S}_{01}(k, k_1) \dots \mathbf{S}_{0N}(k, k_N) \mathcal{T}_0(k) \\ &\times \mathbf{S}_{N0}(k_N, k) \dots \mathbf{S}_{10}(k_1, k) \varphi_{1\dots N}(k_1, \dots, k_N). \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.124})$$

En particulier, pour le vide Ω , on obtient

$$r(k)\Omega = \mathcal{R}(k)\Omega \quad , \quad t(k)\Omega = \mathcal{T}(k)\Omega. \quad (\text{I.2.4.125})$$

En faisant agir l'algèbre d'impureté définie par les relations (I.2.4.118-I.2.4.121) sur Ω , on obtient *les équations de réflexion-transmission de l'approche RT*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1) \mathcal{R}_2(k_2) \\ = \mathcal{R}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, -k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(-k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.126})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1) \mathcal{T}_2(k_2) \\ = \mathcal{T}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.127})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{T}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1) \mathcal{T}_2(k_2) \\ = \mathcal{T}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{T}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1), \end{aligned} \quad (\text{I.2.4.128})$$

$$\mathcal{R}(k) \mathcal{R}(-k) + \mathcal{T}(k) \mathcal{T}(k) = \mathbb{I} \quad , \quad \mathcal{R}(k) \mathcal{T}(-k) + \mathcal{T}(k) \mathcal{R}(k) = 0. \quad (\text{I.2.4.129})$$

À ce stade, il est surprenant à première vue que ces équations n'aient pas la forme de celles de l'approche DMS. En effet, nous rappelons que les objets centraux sont les quantités physiques \mathcal{S} , \mathcal{R} et \mathcal{T} rendant compte des phénomènes de diffusion de la théorie factorisable. Il s'agit donc de s'accorder sur les équations que doivent satisfaire ces quantités. Ensuite, tout comme

dans le cas purement réflexif, le cadre algébrique capable de les reproduire n'est qu'un outil de travail. Tout cela a été au coeur d'un débat animé dans la communauté et ce n'est qu'avec les résultats récents de l'article [VII] (et l'exemple concret de l'article [V]) obtenus pendant ma thèse qu'on a commencé à comprendre la situation plus en profondeur. Nous attacherons donc une attention particulière à exposer les avantages de l'approche RT dans la troisième partie de ce manuscrit en abordant le sujet d'un autre point de vue.

Les représentations de Fock de l'algèbre RT permettent de calculer les éléments de la matrice de diffusion qui se factorisent en une succession de matrices \mathcal{S} , \mathcal{R} et \mathcal{T} . Cela s'obtient en calculant les produits scalaires d'états *in* et *out* construits à partir du vide Ω par l'action répétée des opérateurs création $a_j^\dagger(k)$. Cette démarche est en tout point analogue à celle déjà présentée pour l'algèbre ZF et l'algèbre de bord. Si le problème inverse est résolu, on peut aussi calculer les fonctions de corrélations des champs microscopiques de la théorie à partir des relations de l'algèbre RT. En utilisant les représentations de Fock, on obtient alors les fonctions de corrélation à température nulle. Une approche pour calculer les fonctions de corrélation à température finie en présence d'une impureté a été étudiée par M. Mintchev et P. Sorba dans [94]. L'idée est de baser la construction d'une représentation non pas sur le vide de Fock Ω mais sur un état de Gibbs de l'ensemble grand canonique. En plus de la fonction à deux points pour un champ scalaire libre de masse m , l'influence de l'impureté sur la densité d'énergie et de courant est présentée dans [94]. Cela montre que l'algèbre RT ne se cantonne pas à la description d'impuretés dans les systèmes intégrables à $1+1$ dimensions. En effet dans un papier récent [48], ce concept est utilisé dans un cadre de "monde branaire" bien connu de la théorie des cordes. Une théorie des champs φ^4 est induite sur une "brane" à d dimensions à partir d'un champ dans le volume à $d+1$ dimensions. La particularité de cette "brane" est qu'elle est considérée comme un défaut qui réfléchit et transmet, ce qui généralise l'approche habituelle où la "brane" est purement réflexive. Les propriétés critiques de la théorie induite sont ensuite considérées.

Terminons enfin sur la possibilité de construire une hiérarchie intégrable de façon systématique en présence d'une impureté. En s'inspirant de (I.2.2.60), on définit

$$H_{RT}^{(p)} = \int \frac{dk}{2\pi} k^p a^{\dagger j} a_j(k). \quad (\text{I.2.4.130})$$

A ce niveau, ce sont des objets algébriques et en utilisant uniquement les relations de l'algèbre RT, on montre [96]

$$[H^{(p)}, H^{(q)}] = ((-1)^p - (-1)^q) \int \frac{dk}{2\pi} k^{p+q} a^{\dagger i}(k) r_i^j(k) a_j(-k). \quad (\text{I.2.4.131})$$

Autrement, on a deux hiérarchies indépendantes en involution correspondant à p, q pairs ou p, q impairs. En interprétant $H^{(2)}$ comme l'Hamiltonien d'un système quantique et $H^{(1)}$ comme l'impulsion totale, on obtient que l'impulsion n'est pas une quantité conservée, ce qui est en accord avec le fait physique

que l'impureté brise l'invariance par translation. Cependant, on sait que dans les théories considérées, chaque impulsion est conservée individuellement en valeur absolue. En effet, si une particule est réfléchiée son impulsion passe de k à $-k$ et si elle est transmise, l'impulsion est conservée. Il est intéressant alors de constater que la hiérarchie

$$\tilde{H}_{RT}^{(p)} = \int \frac{dk}{2\pi} |k|^p a^{\dagger j} a_j(k) \quad (\text{I.2.4.132})$$

est en involution (voir l'article [VI]), confirmant l'interprétation précédente. Cela est encore renforcé si l'on remarque que dans le cas purement transmittif ($r(k) = 0$), $H^{(1)}$ est conservé.

Toujours en n'utilisant que les relations d'échanges de l'algèbre RT, on montre

$$[H_{RT}^{(p)}, r(k)] = 0 \quad , \quad [H_{RT}^{(p)}, t(k)] = 0. \quad (\text{I.2.4.133})$$

En d'autres termes, les générateurs de réflexion et de transmission, rangés dans $r(k)$ et $t(k)$ (voir le chapitre suivant pour la présentation explicite de cette procédure dans le cas du Yangien) et qui forment l'algèbre d'impureté, engendrent l'algèbre de symétrie de la hiérarchie considéré. En particulier, c'est la symétrie du modèle décrit par l'Hamiltonien $H_{RT}^{(2)}$. Dans le cas où $t(k) = 0$, on retrouve les résultats pour l'algèbre de réflexion vue comme sous-algèbre de l'algèbre de bord. Et tout comme pour ce cas où un phénomène de brisure spontanée de symétrie a été mis en évidence [91], l'un des travaux effectués pendant la thèse a porté sur l'étude de la brisure spontanée de la symétrie RT induite par la présence de l'impureté. Le mécanisme, qui sera présenté dans la troisième partie et qui est détaillé dans l'article [VI], repose sur les représentations de Fock de l'algèbre RT et en particulier de l'algèbre d'impureté évaluée sur le vide Ω .

Chapitre 3

Symétries dans les systèmes intégrables

Il est un fait indéniable en physique théorique : les symétries d'un problème donné simplifient grandement sa résolution ou du moins apportent des informations très utiles. Tout le monde a utilisé la symétrie cylindrique ou sphérique pour résoudre un problème d'électromagnétisme. Cette stratégie fut utilisée dans le célèbre exemple de l'atome d'hydrogène par Pauli en 1926 qui utilisa l'algèbre de symétrie dynamique engendrée par le moment cinétique et le vecteur de Runge-Lenz dont la théorie des représentations permet de déterminer les niveaux d'énergie du Hamiltonien. Mais pour des systèmes de mécanique classique déjà, cette idée fut exploitée et est à l'origine du concept d'intégrabilité pour les équations d'évolution dans un formalisme Hamiltonien [70, 85] (cf l'introduction). L'idée très générale est que, grâce à des symétries sous-jacentes, il existe des quantités conservées (des intégrales du mouvement) qui permettent de transformer (canoniquement) le problème d'évolution pour un système à n degrés de liberté en un problème d'évolution beaucoup plus simple exprimé en termes des variables dites "action-angle". Il est alors possible d'intégrer les équations différentielles pour ces variables (d'où le nom de système complètement intégrable), ce qui donne leur évolution dans le temps. En appliquant la transformation inverse canonique, on peut donc obtenir en principe les équations d'évolution pour le problème initial.

Remarquons que cette méthodologie est précisément ce qui a inspiré la méthode du problème inverse (classique ou quantique). Cette méthode sera présentée en détail dans la deuxième partie de ce manuscrit à la lumière des travaux importants de l'école de physique mathématique de St-Petersbourg. En nous concentrant sur l'aspect quantique ici, nous voulons simplement montrer encore une fois le rôle fondamental de l'équation de Yang-Baxter quantique dans un contexte plus mathématique. La méthode de diffusion inverse quantique, qui rappelons-le, a conduit entre autres à l'algèbre ZF, est

basée sur deux relations algébriques fondamentales

$$\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{23} = \mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{12}, \quad (\text{I.3.0.1})$$

$$\mathbf{S}_{12}T_1T_2 = T_2T_1\mathbf{S}_{12}. \quad (\text{I.3.0.2})$$

Nous n'avons pas explicité les arguments ici. Le deuxième relation a motivé la relation imposée aux opérateurs bien élevés (I.2.2.71) qui permettent d'identifier le groupe quantique symétrie de la hiérarchie considérée. Nous l'avons nommée de type FRT et sera parfois également appelée *relation RTT* dans la suite. Cette relation est précisément la relation qui apparaît dans la méthode de diffusion inverse quantique ou *méthode la matrice R* pour un objet T appelé *matrice de monodromie* contenant certains opérateurs agissant sur les états quantiques du problème considéré. Cette relation donne alors les relations d'échange de ces opérateurs quantiques et permet de construire un ensemble d'opérateurs commutants que l'on cherche à diagonaliser simultanément. Un des gros avantages de cette méthode est que cet ensemble d'opérateurs commutants contient l'Hamiltonien du système considéré. Toute la procédure fournit alors un système intégrable dont on peut construire les états propres et les valeurs propres : c'est la méthode de *l'ansatz de Bethe algébrique*. Il se trouve que les structures algébriques contenues dans la relation de type FRT, dont l'origine est l'étude de systèmes physiques, ont trouvé une interprétation mathématique dans le cadre des structures d'algèbre de Hopf et de déformations d'algèbres enveloppantes universelles d'algèbres de Lie grâce aux travaux indépendants de V.G. Drinfel'd [40] et de M. Jimbo [71]. Cela a ouvert la voie à une branche importante des mathématiques connue sous le nom de *groupes quantiques*.

Dans le cadre de ce manuscrit, nous allons adopter une vision très pragmatique dans notre présentation de ces structures algébriques et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage très complet de V. Chari et A. Pressley [25] par exemple. Ainsi, nous n'allons pas présenter la notion d'algèbre de Hopf ou de déformation d'algèbre de Lie pour introduire les structures qui nous intéressent mais nous allons plutôt adopter la vision de [95] et appréhender la structure de Yangien comme une algèbre de dimension infinie. Ce choix est motivé par le fait que mes travaux de thèse n'utilisent que cette approche. En outre, je ne vais m'attarder que sur le Yangien de l'algèbre de Lie $gl(n)$ et sa sous-algèbre, l'algèbre de réflexion. Puis je présenterai brièvement la notion de super Yangien. Ce sont les structures algébriques de symétrie essentiellement utilisées pendant ma thèse.

I.3.1 Yangien

Originellement, la notion de Yangien (et de groupe quantique) est basée sur le concept de déformation (de l'enveloppante universelle) d'une bi-algèbre de Lie [40]. Le nom de *Yangien* a été introduit par V.G. Drinfel'd lui-même

dans ses travaux sur les groupes quantiques inspirés de la méthode de diffusion inverse quantique de l'école de St-Petersbourg pour désigner la structure algébrique correspondant aux solutions rationnelles de l'équation de Yang-Baxter. Au niveau quantique, ces solutions sont essentiellement basées sur la matrice trouvée par C.N. Yang dont on a déjà parlé. D'un point de vue pratique, le Yangien de $gl(n)$ noté $\mathcal{Y}(n)$ est l'algèbre associative complexe d'unité $\mathbf{1}$ engendrée par un ensemble dénombrable de générateurs notés $t_{ij}^{(p)}$, $i, j = 1, \dots, n$, $p \in \mathbb{N}$ et dont les relations de définition s'écrivent

$$\left[t_{ij}^{(p+1)}, t_{kl}^{(q)} \right] - \left[t_{ij}^{(p)}, t_{kl}^{(q+1)} \right] = \kappa \left(t_{kj}^{(p)} t_{il}^{(q)} - t_{kj}^{(q)} t_{il}^{(p)} \right), \quad (\text{I.3.1.3})$$

où $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \mathbf{1}$ et κ est le paramètre de déformation du Yangien. Pour faire le lien avec la relation de type FRT, nous allons sans cesse avoir recours aux notations d'espaces auxiliaires déjà introduites. Nous avons en outre besoin de quelques définitions. Rappelons que les espaces avec lesquels nous travaillons sont du type produit tensoriel $\mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n$ sur lesquels on agit grâce à des éléments de $End(\mathbb{C}^n)$. Si M est un tel opérateur, M_j est l'élément de $End((\mathbb{C}^n)^{\otimes m})$ agissant comme M dans la j -ième copie de \mathbb{C}^n et trivialement ailleurs :

$$M_j = \mathbb{I}^{\otimes(j-1)} \otimes M \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-j)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{I.3.1.4})$$

La "taille" nécessaire m est fixée par le contexte. Une fois représenté par l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ sur \mathbb{C} , $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une base de $End(\mathbb{C}^n)$ est donnée par les matrices E_{ij} introduite en section I.2.2. L'opérateur permutation P dans $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ est alors défini par

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ji}. \quad (\text{I.3.1.5})$$

Si A et B sont deux éléments de $End(\mathbb{C}^n)$, on a

$$P_{12}(A \otimes B)P_{12} = B \otimes A. \quad (\text{I.3.1.6})$$

Dans ce contexte, on définit la *matrice R de Yang* $R(u)$ comme un élément de $End(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}(u)$, où u est une variable formelle, de la forme

$$R_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \kappa \frac{P_{12}}{u}. \quad (\text{I.3.1.7})$$

En étendant la méthode décrite par (I.3.1.4) à des opérateurs agissant sur deux copies de \mathbb{C}^n , disons la k -ième et la l -ième, $k, l = 1, \dots, m$, on considère alors les matrices $R_{kl}(u_k - u_l)$ définies par

$$R_{kl}(u_k - u_l) = \mathbb{I}^{\otimes m} - \kappa \frac{P_{kl}}{u_k - u_l} \in End((\mathbb{C}^n)^{\otimes m}) \otimes \mathbb{C}(u_1, \dots, u_m), \quad (\text{I.3.1.8})$$

où les u_j sont m variables formelles. La relation entre cette matrice et celle obtenue historiquement par Yang (I.1.3.62) est évidente et on voit que dans un contexte physique, les variables formelles introduites deviennent des impulsions. Elle vérifie l'équation de Yang-Baxter et l'analogie à une fonction près de la relation d'unitarité

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u), \quad (\text{I.3.1.9})$$

$$R_{12}(u)R_{21}(-u) = \frac{u^2 - \kappa^2}{u^2} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (\text{I.3.1.10})$$

Un autre objet d'importance est la *matrice* T correspondant à la matrice de monodromie du problème inverse quantique. Contrairement à la matrice R , ce n'est pas une matrice numérique mais est une façon très compacte de ranger des éléments algébriques, à savoir les générateurs de $\mathcal{Y}(n)$. En introduisant

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} \mathbf{1} + \kappa \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t_{ij}^{(p)}}{u^p} \in \mathcal{Y}(n) [[u^{-1}]] , \quad (\text{I.3.1.11})$$

la matrice T , qui dépend en fait de la variable u , prend la forme

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes t_{ij}(u) \in \text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{Y}(n) [[u^{-1}]] . \quad (\text{I.3.1.12})$$

On montre alors le résultat important suivant [95] : les relations de définition de $\mathcal{Y}(n)$ (I.3.1.3) sont équivalentes à la *relation* RTT pour la matrice T

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v). \quad (\text{I.3.1.13})$$

Cette relation fondamentale trouve son origine dans les travaux de L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin et L.A. Takhtajan [44] d'où l'appellation *relation de type FRT*. Nous verrons dans la deuxième partie de ce manuscrit qu'elle apparaît naturellement dans la méthode de diffusion inverse quantique et permet par exemple de prouver l'intégrabilité de l'équation de Schrödinger quantique et d'identifier son algèbre de symétrie qui n'est autre que $\mathcal{Y}(n)$. Rappelons à ce titre que ce sont ces travaux sur la méthode de la diffusion inverse quantique, encore appelée ansatz de Bethe algébrique, qui ont motivé ceux de Drinfel'd et de Jimbo. De ce point de vue, notre présentation ne respecte pas la chronologie historique.

Nous voulons maintenant présenter la notion de *déterminant quantique*, noté qdet , qui se révèle très utile dans l'application des groupes quantiques aux systèmes intégrables. En effet, appliqué à la "matrice" $T(u)$, il produit une fonction génératrice d'éléments indépendants de $\mathcal{Y}(n)$ dont on montre (voir par exemple [95]) qu'ils engendrent son centre c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{Y}(n)$ commutant avec tous ses éléments. Une stratégie (qui fait partie des succès de la méthode de diffusion inverse quantique) est alors de montrer que l'Hamiltonien du système qui nous intéresse est un élément

du déterminant quantique. On en déduit immédiatement l'intégrabilité du système (tous les éléments du Yangien étant des intégrales du mouvement) et l'algèbre de symétrie du modèle qui est $\mathcal{Y}(n)$. Cette méthode est très utilisée pour construire de nouveaux systèmes intégrables de façon systématique. Ce genre de construction pour un système en présence d'un bord (le Yangien étant alors remplacé par l'algèbre de réflexion cf. la section suivante) fut l'objet d'un des travaux de ma thèse (article [III]).

En suivant [95], on introduit le déterminant quantique de la façon suivante. Soit A_m l'antisymétriseur agissant sur $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$

$$A_m(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_m} (-)^P e_{i_{P_1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{P_m}}. \quad (\text{I.3.1.14})$$

Pour $m = n$, A_n devient un projecteur unidimensionnel de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{C}v$ avec

$$v = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_n} (-)^P e_{i_{P_1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{P_n}}. \quad (\text{I.3.1.15})$$

En outre, on montre la relation suivante [95]

$$A_n T_1(u) \dots T_n(u - n\kappa + \kappa) = T_n(u - n\kappa + \kappa) \dots T_1(u) A_n, \quad (\text{I.3.1.16})$$

qui permet de déduire que l'objet à gauche (ou à droite) de l'égalité est égal à A_n fois une série formelle en u^{-1} dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{Y}(n)$. Par définition, le déterminant quantique de $T(u)$ est donc un élément de $\mathcal{Y}(n)[[u^{-1}]]$ tel que

$$A_n \text{qdet } T(u) = A_n T_1(u) \dots T_n(u - n\kappa + \kappa). \quad (\text{I.3.1.17})$$

En développant explicitement selon les puissances de u^{-1} , on a

$$\text{qdet } T(u) = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{u^j}. \quad (\text{I.3.1.18})$$

On peut montrer que les c_j sont algébriquement indépendants et qu'ils engendrent tout le centre de $\mathcal{Y}(n)$. Nous avons déjà discuté brièvement l'intérêt physique du déterminant quantique. D'un point de vue mathématique, il permet de définir le Yangien de $sl(n)$ à partir de $\mathcal{Y}(n)$. Si \mathcal{I} est l'idéal engendré par la relation $\text{qdet } T(u) = \mathbf{1}$ alors le Yangien de $sl(n)$ est isomorphe au quotient suivant

$$\mathcal{Y}(sl(n)) \cong \mathcal{Y}(n)/\mathcal{I}. \quad (\text{I.3.1.19})$$

Nous renvoyons le lecteur à [95] par exemple pour plus de détails.

I.3.2 Sous-algèbre et super-algèbre

Dans les travaux effectués pendant la thèse, d'autres structures algébriques se sont révélées importantes. Il s'agit de l'algèbre de réflexion et du super-Yangien correspondant à $\mathcal{Y}(n)$. Nous avons déjà rencontré l'algèbre de réflexion dans le cadre de l'approche algébrique des états asymptotiques d'une théorie factorisable en présence d'un bord. Dans cette présentation la matrice numérique décrivant les relations d'échange était complètement générale. Ici, nous allons voir que les relations de définition que nous avons données rentrent tout naturellement dans le cadre du formalisme FRT et permettent de relier cette structure à celle du Yangien lorsque la matrice numérique est la matrice R de Yang. Pour introduire le super Yangien, nous reviendrons brièvement sur la notion de super-algèbre de Lie et surtout celle d'espaces auxiliaires gradués. Cela permettra une généralisation directe de la relation RTT comme définition du super-Yangien (de $gl(m|n)$).

I.3.2.1 Algèbre de réflexion

Si on adopte la matrice R définie dans la section précédente et équivalente du point de vue mathématique à la matrice \mathbf{S} de Yang, les relations de définition de l'algèbre de réflexion $\mathcal{B}(n, l)$ s'écrivent [96]

$$R_{12}(u-v)r_1(u)R_{12}(u+v)r_2(v) = r_2(v)R_{12}(u+v)r_1(u)R_{12}(u-v), \quad (\text{I.3.2.20})$$

auxquelles on ajoute

$$r(u)r(-u) = \mathbf{1}. \quad (\text{I.3.2.21})$$

La première relation est la définition historique de Sklyanin [120]. Elle est à comprendre en complète analogie avec le formalisme FRT : elle code les relations d'échanges des générateurs $r_{ij}^{(p)}$, $i, j = 1, \dots, n$, $p \in \mathbb{N}$, de l'algèbre associative d'unité $\mathbf{1}$ rangés dans la "matrice" $r(u)$ de la façon suivante

$$r(u) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{r_{ij}^{(p)}}{u^p} \otimes E_{ij} \in \mathcal{B}(n, l) [[u^{-1}]] \otimes \text{End}(\mathbb{C}^n). \quad (\text{I.3.2.22})$$

En suivant [96], $r_{ij}^{(0)}$ peut être pris sous la forme $\delta_{ij}\varepsilon_i\mathbf{1}$ où $\varepsilon_i = 1$ pour $1 \leq i \leq n-l$ et $\varepsilon_i = -1$ pour $n-l+1 \leq i \leq n$, l étant l'entier positif caractérisant l'algèbre tel que $0 \leq l \leq n/2$. La deuxième relation semble naturelle d'un point de vue physique puisqu'on a vu qu'elle représente l'unitarité de la matrice de réflexion et donc la conservation de la probabilité de présence pour un bord purement réfléchissant. D'un point de vue mathématique, il se trouve que cette relation permet d'établir que $\mathcal{B}(n, l)$ est une sous-algèbre (en fait un coïdéal à gauche) de $\mathcal{Y}(n)$ [96]. Soit G la matrice diagonale d'éléments non nuls $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ et $T^{-1}(u)$ l'inverse de la matrice $T(u)$ de $\mathcal{Y}(n)$ définie comme une série entière. L'idée est de plonger $\mathcal{B}(n, l)$ dans $\mathcal{Y}(n)$ grâce à une

application π dont on montre qu'elle définit un homomorphisme d'algèbre et qu'elle est injective [96]

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}(n, l) &\rightarrow \mathcal{Y}(n) \\ r(u) &\mapsto T(u)GT^{-1}(-u) \end{aligned} \quad (\text{I.3.2.23})$$

Soit $\tilde{r}(u) = T(u)GT^{-1}(-u)$. Comme $G^2 = \mathbb{I}$, on a $\tilde{r}(u)\tilde{r}(-u) = \mathbf{1}$ et le point important est que ce sont les relations RTT définissant le Yangien qui permettent de montrer que $\tilde{r}(u)$ vérifie (I.3.2.20). Remarquons que ces résultats sont encore vrais si on remplace G par une matrice numérique quelconque $B(u)$ telle que $B(u)B(-u) = \mathbb{I}$ et vérifiant (I.3.2.20). C'est ce qui sera utilisé dans l'article [III].

Tout comme pour le Yangien, un objet très important dans la construction de systèmes intégrables avec bord est l'analogue du déterminant quantique appelé *déterminant de Sklyanin* et noté sdet . En effet, grâce au plongement décrit ci-dessus et à sa définition qui utilise l'antisymétriseur A_n , on obtient que le déterminant de Sklyanin de $r(u)$ est une série en u^{-1} de la forme

$$\text{sdet } r(u) = (-1)^l \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{u^j} \in \mathcal{B}(n, l) [[u^{-1}]] \quad (\text{I.3.2.24})$$

dont les coefficients d_j sont des éléments centraux de $\mathcal{B}(n, l)$. Le centre est par ailleurs engendré par les coefficients impairs qui sont algébriquement indépendants. En pratique, on cherchera donc à identifier l'Hamiltonien d'un système dans le déterminant de Sklyanin ce qui permettra de conclure sur l'intégrabilité et la symétrie du système correspondant. Tout cela se montre en particulier grâce au résultat suivant

$$\text{sdet } r(u) = f(u) \text{qdet } T(u) (\text{qdet } T(-u + n - 1))^{-1} \quad (\text{I.3.2.25})$$

où f est une fonction scalaire de u que l'on peut déterminer. Cette relation est très utile dans la pratique car elle permet un calcul plus aisé des coefficients de la série en partant de ceux du déterminant quantique.

I.3.2.2 Super-Yangien

Avant d'introduire le super-Yangien (sous-entendu de $gl(m|n)$ ici), nous rappelons brièvement ce qu'est une super-algèbre de Lie renvoyant le lecteur intéressé aux travaux fondateurs de V.G. Kac [72, 73] ou par exemple à l'ouvrage [50]. Pour l'essentiel, le point de vue adopté dans ce manuscrit repose sur la notion de *formalisme gradué*.

Soit \mathcal{A} une algèbre complexe de deuxième loi interne m appelée multiplication et $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ des classes d'équivalence de 0 et de 1. \mathcal{A} est une super-algèbre si elle peut être décomposée en somme directe de deux sous-espaces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que

$$m(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{0}}) \subset \mathcal{A}_{\bar{0}} \quad , \quad m(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) \subset \mathcal{A}_{\bar{1}} \quad , \quad m(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) \subset \mathcal{A}_{\bar{0}} \quad (\text{I.3.2.26})$$

Dans ce cas, on définit le *degré* d'un élément de \mathcal{A} comme suit

$$\begin{cases} [a] = \bar{0} & , \quad a \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \\ [a] = \bar{1} & , \quad a \in \mathcal{A}_{\bar{1}}. \end{cases} \quad (\text{I.3.2.27})$$

Le formalisme gradué apparaît lorsqu'on considère des produits tensoriels de super-algèbres. Il nous sera donc très utile vu notre usage fréquent des espaces auxiliaires. Soit \mathcal{A} et \mathcal{A}' deux super-algèbres. Leur produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ est dit gradué si la multiplication m est étendue au produit tensoriel de la façon suivante

$$m(a \otimes a', b \otimes b') = (-1)^{[a'] [b]} m(a, b) \otimes m(a', b'), \quad (\text{I.3.2.28})$$

où $a, b \in \mathcal{A}$ et $a', b' \in \mathcal{A}'$ avec a' et b ayant un degré bien défini. La seule différence avec la définition habituelle pour une algèbre réside dans le signe apparaissant dans le membre de droite. De façon intuitive, lorsqu'on "croise" a' et b pour que a' aille "parler" à a et b à b' , leur "nature" intervient et doit être prise en compte. Tout cela rappelle le comportement des bosons ou des fermions et c'est pour cela que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est souvent appelé *secteur bosonique* tandis que $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ est appelé *secteur fermionique*. C'est plus qu'une simple terminologie car le formalisme gradué est utilisé par exemple dans les articles [I] et [II] pour décrire dans un formalisme unifié la présence de bosons et de fermions dans l'équation de Schrödinger non-linéaire.

La structure d'algèbre de Lie est adaptée en conséquence et dans ce cas la multiplication dans \mathcal{A} est donnée par le *super-crochet* $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ ayant les propriétés suivantes

– Antisymétrie graduée :

$$\llbracket a, b \rrbracket = -(-1)^{[a] [b]} \llbracket b, a \rrbracket, \quad (\text{I.3.2.29})$$

– Identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{[a] [c]} \llbracket a, \llbracket b, c \rrbracket \rrbracket + (-1)^{[c] [b]} \llbracket c, \llbracket a, b \rrbracket \rrbracket + (-1)^{[b] [a]} \llbracket b, \llbracket c, a \rrbracket \rrbracket = 0, \quad (\text{I.3.2.30})$$

avec $a, b, c \in \mathcal{A}$ de degré défini. L'exemple qui nous intéresse est la super-algèbre $gl(m|n)$ dont la base usuelle E_{ij} , $i, j = 1, \dots, m+n$ est graduée de la façon suivante

$$[E_{ij}] = [i] + [j], \quad (\text{I.3.2.31})$$

avec

$$\begin{cases} [i] = \bar{0} & , \quad 1 \leq i \leq m \\ [i] = \bar{1} & , \quad m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}. \quad (\text{I.3.2.32})$$

Remarquons que nous avons anticipé la réalisation matricielle de $gl(m|n)$ en conservant la notation E_{ij} pour ses générateurs. La structure de super-algèbre de Lie est caractérisée par le super-crochet suivant

$$\llbracket E_{ij}, E_{kl} \rrbracket = \delta_{jk} E_{il} - (-1)^{([i] + [j])([k] + [l])} \delta_{il} E_{kj}. \quad (\text{I.3.2.33})$$

De façon générale, un élément M de la réalisation matricielle de $gl(m|n)$ s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{I.3.2.34})$$

où A (resp. D) est une matrice de $gl(m)$ (resp. $gl(n)$) et B et C sont des matrices rectangulaires de taille $m \times n$ et $n \times m$. Si tr représente la forme linéaire appelée "trace", on définit la *supertrace* str sur $gl(m|n)$ par

$$str(M) = tr(A) - tr(D). \quad (\text{I.3.2.35})$$

Cela permet de définir en analogie avec $sl(n)$ la super-algèbre $sl(m|n)$ comme la super-algèbre des matrices M de $gl(m|n)$ telles que $str(M) = 0$.

On peut maintenant passer à la définition du Yangien associé à la super-algèbre de Lie $gl(m|n)$. Soit l'espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$ avec $\dim \mathcal{V}_0 = m$ et $\dim \mathcal{V}_1 = n$. $gl(m|n)$ peut être vue comme la super-algèbre $End(\mathcal{V})$ muni du super-crochet $[\![\ , \]\!]$ défini précédemment avec comme générateurs les matrices $E_{ij} \in End(\mathcal{V})$ de degré $[E_{ij}] = [i] + [j]$. On suppose à présent que les produits tensoriels sont gradués et cela permet de définir la super-permutation, toujours notée P_{12} , comme l'élément de $End(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})$ de la forme

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{m+n} (-1)^{[j]} E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (\text{I.3.2.36})$$

et vérifiant les propriétés souhaitées

$$P_{12}^2 = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \ , \ P_{12}(a \otimes b) = b \otimes a \ , \ a, b \in \mathcal{V}, \quad (\text{I.3.2.37})$$

où il est sous-entendu que \mathbb{I} est la matrice identité de taille $m+n$ ici. Remarquons qu'on peut définir l'équivalent de la base canonique e_i du cas non-gradué. On conserve la même notation et le degré de $e_j \in \mathcal{V}$ est donné par $[e_j] = [j]$, $j = 1, \dots, m+n$. On transpose alors toute la construction de type FRT. On définit la matrice R graduée

$$R_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \kappa \frac{P_{12}}{u}, \quad (\text{I.3.2.38})$$

qui vérifie l'équation de Yang-Baxter et la relation d'unitarité graduées

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u), \quad (\text{I.3.2.39})$$

$$R_{12}(u)R_{21}(-u) = \frac{u^2 - \kappa^2}{u^2} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (\text{I.3.2.40})$$

On a alors tous les ingrédients pour définir le Yangien de $gl(m|n)$, qu'on notera $\mathcal{Y}(m|n)$, exactement comme pour $\mathcal{Y}(n)$ en rangeant les générateurs dans une matrice $T(u)$ [98]

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v). \quad (\text{I.3.2.41})$$

Pour bien se rendre compte de la différence introduite par le formalisme gradué, on écrit les relations correspondantes entre générateurs

$$\left[t_{ij}^{(p+1)}, t_{kl}^{(q)} \right] - \left[t_{ij}^{(p)}, t_{kl}^{(q+1)} \right] = (-1)^{[k][i] + [k][j] + [i][j]} \kappa \left(t_{kj}^{(p)} t_{il}^{(q)} - t_{kj}^{(q)} t_{il}^{(p)} \right). \quad (\text{I.3.2.42})$$

Notons que la définition du Yangien de $sl(m|n)$ n'est pas aussi aisée que dans le cas de $\mathcal{Y}(n)$ car il n'est pas prouvé que le Bérézienien quantique, qui joue le rôle du déterminant quantique dans le cas de la super-algèbre et dont les coefficients ont été calculés pour la première fois dans [98], engendre tout le centre de $\mathcal{Y}(m|n)$. En revanche, la généralisation de l'algèbre de réflexion au cas super se fait naturellement en utilisant les mêmes relations de définition que pour l'algèbre de réflexion $\mathcal{B}(n, l)$.

Deuxième partie

Méthodes de résolution des
systèmes intégrables

Chapitre 1

L'équation de Schrödinger non-linéaire classique

En prenant comme support l'équation de Schrödinger non-linéaire, qui est une théorie des champs (classique dans ce chapitre), nous allons illustrer les tenants et aboutissants de la méthode de diffusion inverse qui fut appliquée pour la première fois dans l'article de C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal et R.M. Miura [52] pour un autre système intégrable célèbre : l'équation de Korteweg-de Vries. La présentation sera abordée de telle manière que la *quantification* de la méthode présentée dans le deuxième chapitre, et intensivement développée par l'école de St-Petersbourg [45, 117, 119], suive les mêmes raisonnements. La méthode présentée dans le premier et le deuxième chapitre de cette partie sera bien sûr propre à l'équation de Schrödinger non-linéaire mais nous insistons sur le fait que les concepts généraux (notamment au niveau quantique) sont les mêmes pour de nombreux systèmes intégrables (chaînes de spins, modèles de spins dynamiques, etc.). En particulier, le rôle central du formalisme FRT est indéniable et sera souligné dans le troisième chapitre.

Au niveau classique, le problème considéré prend la forme d'une équation aux dérivées partielles pour une fonction, *le champ classique*, qui dépend du temps t et de la position x sur la ligne (on rappelle que nous parlons de systèmes à une dimension spatiale). L'idée à la base de la méthode (et ce quel que soit le modèle intégrable considéré) est d'utiliser un *problème auxiliaire* encore appelé *problème spectral*. Dans cette approche, un champ auxiliaire est introduit et satisfait un problème différentiel contenant un *paramètre spectral* et le champ initial comme potentiel. Tout le problème est alors de choisir convenablement l'opérateur différentiel auxiliaire. Dès lors, on peut résoudre en termes des données auxiliaires, ou *données spectrales*, qui ont une évolution temporelle extrêmement simple. Cela est à mettre en relation directe avec la mise en évidence de variables "action-angle" de l'approche originelle de Liouville. En effet, l'interprétation hamiltonienne du problème inverse a montré que ces transformations pouvaient être vues comme des transformations vers des variables "action-angle" [131]. En outre, il est pos-

sible d'exprimer ces nouvelles variables à l'évolution simple en fonction du champ de départ. Cela représente la *partie directe* du problème inverse. Toute la question ensuite est d'inverser cette relation afin d'exprimer le champ de départ en fonction des données spectrales. Le problème est alors résolu en principe car l'évolution temporelle du champ, dictée par une équation non-linéaire et difficilement résoluble, est contrôlée par celle beaucoup plus simple des données spectrales. C'est la partie inverse du problème inverse. Le fait que cette terminologie se soit imposée historiquement montre bien que c'est la partie la plus délicate. Notons enfin que la recherche du problème auxiliaire est intimement liée à la procédure dite *de la paire de Lax* [79]. Après avoir présenté l'équation de Schrödinger non-linéaire classique dans la première section, nous exposerons dans la deuxième section toutes ces notions dont le fil conducteur repose sur l'intégrabilité et la possibilité de résoudre.

II.1.1 Présentation du modèle

L'équation de Schrödinger est l'un des fondements de la mécanique quantique. Sous sa forme traditionnelle, elle décrit l'évolution dans le temps d'une fonction complexe, la *fonction d'onde* ψ dépendant du temps et de la position, qui est l'objet représentant un système quantique. Si on imagine que ce système est soumis à un potentiel extérieur V , l'équation prend la forme

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V(x,t)\psi. \quad (\text{II.1.1.1})$$

Rappelons que nous avons choisi $\hbar = 1$ et $2m = 1$. Si $V = 0$, le système décrit est dit libre car il n'est soumis à aucun potentiel extérieur. En revanche, on peut imaginer que le système évolue dans un milieu tel que son influence puisse se modéliser par un terme d'auto-interaction. C'est typiquement le cas en optique non-linéaire. Dans ce cas, le potentiel extérieur est remplacé par un terme d'auto-interaction, c'est-à-dire un terme qui couple la fonction à elle-même, voire à ses dérivées. C'est l'origine du nom "équation de Schrödinger non-linéaire", le terme "non-linéaire" se référant à un terme cubique en fonction d'onde modélisant un phénomène d'auto-interaction qui peut être vu souvent comme le résultat effectif de l'action du milieu extérieur sur le système. Pour être plus précis, le Lagrangien de l'équation de Schrödinger non-linéaire correspond à une théorie ϕ^4 non-relativiste (l'équation du mouvement est du premier ordre en t) de densité

$$\mathcal{L} = i\psi^*\partial_t\psi - |\partial_x\psi|^2 - g|\psi|^4, \quad (\text{II.1.1.2})$$

où g est la constante de couplage (cf. la discussion en fin de section I.1.1 de la première partie) qui est réelle, une valeur négative offrant la possibilité d'états liés (cf. [88, 129]). On obtient l'Hamiltonien

$$H_{NLS} = \int_{\mathbb{R}} dx \left(\partial_x\psi^*\partial_x\psi + g(\psi^*\psi)^2 \right), \quad (\text{II.1.1.3})$$

et l'équation du mouvement pour le champ

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + 2g|\psi|^2 \psi. \quad (\text{II.1.1.4})$$

Par analogie avec l'équation de Schrödinger usuelle, le "potentiel" est ici $V(\psi) = g|\psi|^2$. L'équation du mouvement s'obtient à partir de l'Hamiltonien si on s'équipe du crochet de Poisson suivant défini sur l'espace des fonctionnelles en ψ , ψ^* considérés comme des degrés de liberté indépendants

$$\{F, G\} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta F}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right), \quad (\text{II.1.1.5})$$

où $F(\psi, \psi^*)$ et $G(\psi, \psi^*)$ sont deux telles fonctionnelles. Cela donne en particulier,

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0, \quad \{\psi^*(x), \psi^*(y)\} = 0 \quad (\text{II.1.1.6})$$

$$\{\psi(x), \psi^*(y)\} = i\delta(x - y), \quad (\text{II.1.1.7})$$

et (II.1.1.4) découle alors de

$$\partial_t \psi = \{H_{NLS}, \psi\}. \quad (\text{II.1.1.8})$$

Il est très facile d'introduire un champ vectoriel dont les degrés internes interagissent entre eux via le terme cubique de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Si on garde la notation ψ pour désigner le vecteur colonne de composantes ψ_j , $j = 1, \dots, n$ et que l'on introduit la notation ψ^\dagger pour désigner le vecteur ligne de composantes ψ_j^* , $j = 1 \dots, n$ alors l'Hamiltonien est tout simplement

$$H_{NLS} = \int_{\mathbb{R}} dx (\partial_x \psi^\dagger \partial_x \psi + g(\psi^\dagger \psi)^2), \quad (\text{II.1.1.9})$$

et l'équation du mouvement correspondante pour le champ ψ_j devient

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_j = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_j + g(\psi^\dagger \psi) \psi_j. \quad (\text{II.1.1.10})$$

Bien entendu, tout cela peut s'écrire en utilisant les espaces auxiliaires. Dès lors, en utilisant le formalisme gradué introduit en I.3.2.2 de la première partie, on peut facilement coder un "super-champ" possédant des degrés bosoniques et fermioniques. Ceci est à la base de l'approche des articles [I] et [II]. On peut alors étendre tous les résultats que nous allons présenter dans la section suivante pour la version scalaire correspondant à (II.1.1.4).

II.1.2 Intégrabilité et résolution

Dans cette section, nous commençons par identifier le problème spectral (dont nous avons souligné l'importance en introduction et qui représente le

point de départ de la méthode de diffusion inverse) pour le problème différentiel particulier que représente l'équation de Schrödinger non-linéaire [133]. Cela est relié à la célèbre *paire de Lax* constituée de deux opérateurs matriciels et différentiels dont l'un produit le problème spectral. Ensuite, l'élaboration de la méthode de diffusion inverse permettra de prouver l'intégrabilité et la symétrie du modèle. Enfin, nous verrons la méthode de résolution dite "*à la Rosales*" qui aura une profonde conséquence au niveau quantique.

II.1.2.1 Paire de Lax et problème direct

Le problème spectral (ou problème auxiliaire) pour l'équation de Schrödinger non-linéaire s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} u = L(\lambda, x) u, \quad (\text{II.1.2.11})$$

où u est un vecteur à deux composantes $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $L(\lambda, x)$ est la (première) matrice de Lax donnée par

$$L(\lambda, x) = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & ig\psi^* \\ -i\psi & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.2.12})$$

La deuxième matrice de Lax apparaît dans le problème donnant l'évolution temporelle de u

$$\frac{\partial}{\partial t} u = M(\lambda, x) u, \quad (\text{II.1.2.13})$$

avec

$$M(\lambda, x) = \begin{pmatrix} i\frac{\lambda^2}{2} + ig|\psi|^2 & g(\partial_x \psi^* - i\lambda \psi^*) \\ \partial_x \psi + i\lambda \psi & -i\frac{\lambda^2}{2} - ig|\psi|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.2.14})$$

Bien entendu, les deux matrices formant la paire de Lax dépendent du temps t par l'intermédiaire du champ ψ . Cette présentation suit le choix fait dans [119] par exemple car elle a l'avantage de ne pas introduire de différence entre les cas $g > 0$ ou $g < 0$. D'autres choix faisant intervenir $\sqrt{|g|}$ sont possibles. Avec ce formalisme, l'équation de Schrödinger non-linéaire apparaît comme la condition de compatibilité du problème auxiliaire composé de (II.1.2.11) et (II.1.2.13) imposé par $\partial_{xt} u = \partial_{tx} u$ pour tout λ et qui s'interprète comme une condition de courbure nulle pour les dérivées covariantes $\partial_x - L(\lambda, x)$ et $\partial_t - M(\lambda, x)$

$$[\partial_x - L(\lambda, x), \partial_t - M(\lambda, x)] = 0, \quad (\text{II.1.2.15})$$

ou encore

$$\partial_t L - \partial_x M + [L, M] = 0. \quad (\text{II.1.2.16})$$

Nous renvoyons le lecteur aux articles originaux [133, 132] pour plus de précisions. Dans l'approche stationnaire que nous présentons ici, nous n'utilisons que la première équation (II.1.2.11). Etant donné un point fixé x_1 , soit $T_{x_1}^x(\lambda)$ la matrice 2×2 solution du problème auxiliaire

$$\frac{d}{dx} T_{x_1}^x(\lambda) = L(\lambda, x) T_{x_1}^x(\lambda), \quad (\text{II.1.2.17})$$

avec $T_x^x(\lambda) = \mathbb{I}$. La matrice $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ est appelée *matrice de transition* sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. En effet, si f est solution du problème spectral, on a $f(x_2) = T_{x_1}^{x_2}(\lambda) f(x_1)$. Une part importante de la méthode consiste à calculer les crochets de Poisson des éléments de la matrice de transition qui sont des fonctionnelles des champs ψ et ψ^* puis de passer à la limite de la ligne infinie ($x_1 \rightarrow -\infty$ et $x_2 \rightarrow \infty$). Les éléments de la matrice ainsi obtenue, appelée *matrice de monodromie*, sont reliés aux intégrales du mouvement et aux variables action-angle. Commençons par énumérer certaines propriétés très utiles de la matrice de transition qui découlent directement de sa définition et des propriétés de $L(\lambda, x)$

$$T_{x_2}^{x_3}(\lambda) T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = T_{x_1}^{x_3}(\lambda), \quad \forall x_1, x_2, x_3, \quad (\text{II.1.2.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -T_{x_1}^{x_2}(\lambda) L(\lambda, x_1), \quad (\text{II.1.2.19})$$

$$T_{x_1}^{*x_2}(\lambda) = U T_{x_1}^{x_2}(\lambda^*) U, \quad (\text{II.1.2.20})$$

où

$$U = \begin{pmatrix} 0 & g^{1/2} \\ g^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.2.21})$$

Si $g < 0$, $g^{1/2}$ est à comprendre comme $i\sqrt{|g|}$. Cette dernière propriété permet d'écrire la matrice de transition sous la forme

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{x_1}^{x_2}(\lambda) & g b_{x_1}^{*x_2}(\lambda^*) \\ b_{x_1}^{x_2}(\lambda) & a_{x_1}^{*x_2}(\lambda^*) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.2.22})$$

où $a_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ et $b_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ sont des fonctionnelles en ψ , ψ^* qui dépendent de x_1 , x_2 et λ . Il est possible d'obtenir une expression explicite de ces éléments en utilisant le fait que la définition de la matrice de transition entraîne qu'elle a la forme d'une exponentielle ordonnée

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_1}^{x_2} dx L(\lambda, x) \right) \quad (\text{II.1.2.23})$$

et on obtient [119]

$$\begin{aligned} a_{x_1}^{x_2}(\lambda) = & e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int_{x_1 < \xi_1 < \dots < \xi_{2n} < x_2} \dots \int d^{2n} \xi \, e^{i\lambda(\xi_{2n} - \xi_{2n-1} + \dots - \xi_1)} \\ & \times \psi^*(\xi_{2n}) \dots \psi^*(\xi_2) \psi(\xi_{2n-1}) \dots \psi(\xi_1), \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.24})$$

$$b_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -ie^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2+x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int \dots \int_{x_1 < \xi_1 < \dots < \xi_{2n+1} < x_2} d^{2n+1}\xi e^{i\lambda(-\xi_{2n+1}+\xi_{2n}+\dots-\xi_1)} \\ \times \psi^*(\xi_{2n}) \dots \psi^*(\xi_2) \psi(\xi_{2n+1}) \dots \psi(\xi_1) \quad (\text{II.1.2.25})$$

En introduisant les matrices

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.2.26})$$

on va pouvoir définir la matrice de monodromie et calculer les crochets de Poisson de ses éléments. La limite suivante existe et définit la matrice de monodromie $T(\lambda)$

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \left(e^{i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x_2} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) e^{-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x_1} \right). \quad (\text{II.1.2.27})$$

Les éléments indépendants sont $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ obtenus tout simplement à partir de (II.1.2.24) et (II.1.2.25) en supprimant la dépendance en x_1 et x_2 . Il est possible de regrouper les seize crochets de Poisson pour les différents éléments de $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ en utilisant des espaces auxiliaires. On cherche donc à calculer

$$\{T_{1;x_1}^{x_2}(\lambda), T_{2;x_1}^{x_2}(\mu)\} = \{(T_{x_1}^{x_2}(\lambda))_{ij}, (T_{x_1}^{x_2}(\mu))_{kl}\} (E_{ij} \otimes E_{kl}). \quad (\text{II.1.2.28})$$

Un résultat fondamental faisant appel à la *matrice r classique* et qui a donné son nom à cette méthode dite *méthode de la matrice r* est le suivant [119] : pour $x_1 < x_2$,

$$\{T_{1;x_1}^{x_2}(\lambda), T_{2;x_1}^{x_2}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda - \mu), T_{1;x_1}^{x_2}(\lambda) T_{2;x_1}^{x_2}(\mu)], \quad (\text{II.1.2.29})$$

où

$$r_{12}(u) = -\frac{g}{u} P_{12}. \quad (\text{II.1.2.30})$$

Quand $\lambda = \mu$ cette écriture semble faire apparaître une singularité mais en réalité, dans ce cas, le membre de droite est à comprendre comme la limite quand λ tend vers μ , qui est bien définie [62]. Le point délicat maintenant est la passage à la limite de l'intervalle infini car elle est à prendre au sens des distributions. L'excellente revue de E. Gutkin [62] présente ce point en détail et valide rigoureusement les résultats fondamentaux qui sont présentés plus ou moins formellement dans [119]. Nous renvoyons le lecteur à ces deux références pour les détails des preuves du résultat crucial suivant

$$\{T_1(\lambda), T_2(\mu)\} = r^+(\lambda - \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) - T_1(\lambda) T_2(\mu) r^-(\lambda - \mu), \quad (\text{II.1.2.31})$$

avec

$$r^\pm(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} v.p.\frac{1}{\lambda-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & \mp i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v.p.\frac{1}{\lambda-\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.2.32})$$

$v.p.$ désignant la valeur principale de Cauchy dont on rappelle la propriété suivante

$$v.p. \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x) = \frac{1}{x \mp i0} . \quad (\text{II.1.2.33})$$

Le membre de droite de (II.1.2.31) est alors facilement calculable comme produit de matrices et il suffit ensuite d'identifier les différentes entrées à gauche et à droite pour obtenir les crochets de Poisson désirés. Nous donnons explicitement les six éléments indépendants pour des paramètres spectraux λ, μ réels

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = \{a(\lambda), a^*(\mu)\} = \{b(\lambda), b(\mu)\} = 0 , \quad (\text{II.1.2.34})$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{g}{\lambda - \mu + i0} a(\lambda)b(\mu) , \quad (\text{II.1.2.35})$$

$$\{a(\lambda), b^*(\mu)\} = -\frac{g}{\lambda - \mu + i0} a(\lambda)b^*(\mu) , \quad (\text{II.1.2.36})$$

$$\{b(\lambda), b^*(\mu)\} = 2i\pi\delta(\lambda - \mu) |a(\lambda)|^2 . \quad (\text{II.1.2.37})$$

Nous sommes alors en mesure de conclure sur l'intégrabilité du système. En gardant à l'esprit que ψ et ψ^* sont des champs physiques, on peut raisonnablement supposer qu'ils tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Cela permet d'effectuer des intégrations par parties dans la série qui définit $a(\lambda)$ et en particulier, on peut montrer que $a(\lambda)$ s'écrit comme une série entière en λ^{-1}

$$a(\lambda) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{a_n}{\lambda^{n+1}} . \quad (\text{II.1.2.38})$$

Le premier crochet de Poisson ci-dessus montre alors que les quantités a_n sont en involution

$$\{a_n, a_m\} = 0 . \quad (\text{II.1.2.39})$$

Or ces quantités sont des fonctionnelles en ψ , ψ^* et on peut calculer les premières d'entre elles explicitement

$$a_0 = gN \quad , \quad a_1 = -igP + \frac{g^2}{2}N^2 \quad (\text{II.1.2.40})$$

$$a_2 = -gH_{NLS} - ig^2PN + \frac{g^3}{6}N^3 \quad (\text{II.1.2.41})$$

où nous avons fait apparaître des intégrales de densités locales (en ψ , ψ^*) bien connues : le nombre de particules, l'impulsion totale et l'Hamiltonien du modèle

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi|^2 , \quad (\text{II.1.2.42})$$

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x \psi^* \psi - \psi^* \partial_x \psi) , \quad (\text{II.1.2.43})$$

$$H_{NLS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x \psi^* \partial_x \psi + g(\psi^* \psi)^2) . \quad (\text{II.1.2.44})$$

Ce dernier point est important car il montre que $a(\lambda)$ engendre une infinité de quantités indépendantes et en involution dont l'Hamiltonien fait partie : ce sont des quantités conservées ou encore des intégrales du mouvement. Par analogie avec la définition pour un système classique avec un nombre fini de degré de liberté, nous en déduisons que l'équation de Schrödinger non-linéaire classique est intégrable. La même conclusion peut être obtenue avec une autre série génératrice considérée historiquement dans [132, 133] : $\ln a(\lambda)$ qui a l'avantage de donner directement les trois quantités ci-dessus et de permettre une détermination des coefficient successifs par une relation de récurrence. En écrivant

$$\ln a(\lambda) = ig \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda^{n+1}} \quad (\text{II.1.2.45})$$

où

$$h_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, h_n(x) \quad (\text{II.1.2.46})$$

avec

$$h_{n+1}(x) = -i\psi^* \frac{d}{dx} \left(\frac{h_n(x)}{\psi^*} \right) + g \sum_{p+q=n-1} h_p(x) h_q(x), \quad (\text{II.1.2.47})$$

et

$$h_0(x) = |\psi(x)|^2. \quad (\text{II.1.2.48})$$

On obtient alors

$$h_0 = N, \quad h_1 = P, \quad h_2 = H_{NLS}. \quad (\text{II.1.2.49})$$

Une propriété de $a(\lambda)$ est que cet élément admet une continuation analytique dans le demi-plan supérieur $\text{Im } \lambda > 0$ [133], ce qui peut être vu directement à partir de son expression explicite. C'est d'ailleurs le domaine de validité des développements que nous venons de voir. Pour $g < 0$, il faut tenir compte d'un spectre discret correspondant aux zéros de $a(\lambda)$ dans le demi-plan $\text{Im } \lambda > 0$ (voir par exemple [4]), ce que nous ne ferons pas dans la suite car notre intention est de faire pressentir la version quantique de toute cette approche en présentant des résultats qui ont une contrepartie quantique directe. De la relation (II.1.2.35), on tire

$$\{\ln a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{g}{\lambda - \mu} b(\mu), \quad (\text{II.1.2.50})$$

ce qui entraîne, en faisant un développement en λ^{-1} des deux membres

$$\{h_n, b(\mu)\} = -i\mu^n b(\mu). \quad (\text{II.1.2.51})$$

En outre la relation (II.1.2.34) donne directement

$$\{h_n, a(\mu)\} = 0. \quad (\text{II.1.2.52})$$

Pour $n = 2$, on obtient alors l'évolution dans le temps des quantités $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$, qui est extrêmement simple

$$a(\lambda, t) = a(\lambda) \quad , \quad b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} b(\lambda). \quad (\text{II.1.2.53})$$

Si on résume, on voit qu'on a identifié un ensemble dénombrable de quantités indépendantes en involution et une transformation (non-locale en termes des champs initiaux) $(\psi(x, t), \psi^*(x, t)) \mapsto (a(\lambda, t), b(\lambda, t))$ telle que l'évolution des nouvelles variables est extrêmement simple. Ces résultats justifient la conclusion que l'équation de Schrödinger non-linéaire classique est un système complètement intégrable. Cependant, les variables a, b ne sont pas des variables "action-angle" à proprement parler car elles ne satisfont pas les crochets de Poisson canoniques et l'Hamiltonien ne s'exprime pas uniquement en fonction d'un des deux types de variables. Nous verrons dans la suite des variables qui ont la première propriété tandis que la deuxième est remplacée par une autre propriété intéressante : ces variables diagonalisent la hiérarchie. Il est toutefois possible de construire de véritables variables "action-angle" $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ explicitement à partir de $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ (au moins pour l'équation de Schrödinger non-linéaire et de Korteweg-de Vries, voir [4]) telles que

$$H = \mathcal{F}(P) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta P},$$

et permettant la quadrature propre au théorème de Liouville et à l'origine du terme "système intégrable". En effet, P est une constante et Q varie linéairement dans le temps. Cet exemple suggère une généralisation de la notion de système intégrable pour une théorie des champs, d'autant plus que le même genre de construction est faisable pour l'équation de Korteweg-de Vries. Un tel système sera dit intégrable s'il existe une infinité dénombrable de quantités indépendantes en involution¹.

Voyons maintenant d'autres variables que certains auteurs ayant la version quantique en tête préfèrent introduire. Elles ont les propriétés intéressantes de diagonaliser simultanément toutes les intégrales du mouvement (ce qui permettra en particulier de retrouver une évolution temporelle très simple) et de satisfaire les relations canoniques pour les crochets de Poisson. Soit $\varphi(\lambda)$ et $\varphi^*(\lambda)$ ces variables. On veut

$$\{\varphi(\lambda), \varphi(\mu)\} = \{\varphi^*(\lambda), \varphi^*(\mu)\} = 0, \quad (\text{II.1.2.54})$$

$$\{\varphi(\lambda), \varphi^*(\mu)\} = i\delta(\lambda - \mu), \quad (\text{II.1.2.55})$$

1. Il n'existe pas d'équivalent du théorème de Liouville dans ce contexte. Cette définition est donc à prendre au cas par cas. Il arrive qu'une notion de "complétude" soit nécessaire pour établir cette notion convenablement et ne pas aboutir à des conclusions erronées. Mais nous n'entrerons pas plus dans ces considérations ici.

et

$$h_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^n \varphi^*(\lambda) \varphi(\lambda). \quad (\text{II.1.2.56})$$

Il est tout à fait remarquable que l'on puisse trouver de telles quantités. Voyons les grandes lignes du raisonnement. En se rappelant la définition des h_n (II.1.2.45), l'égalité précédente donne

$$\ln a(\lambda) = ig \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{|\varphi(\mu)|^2}{\lambda - \mu}. \quad (\text{II.1.2.57})$$

Or, moyennant quelques hypothèses sur le comportement analytique de $a(\lambda)$ (voir par exemple [4]), on peut représenter $\ln a(\lambda)$ sous forme intégrale en utilisant la formule de Cauchy (pour $g > 0$)

$$\ln a(\lambda) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\ln |a(\mu)|}{\lambda - \mu}, \quad (\text{II.1.2.58})$$

ce qui suggère

$$|\varphi(\mu)|^2 = \frac{\ln |a(\mu)|}{g\pi}. \quad (\text{II.1.2.59})$$

Une propriété importante de la matrice de monodromie est que son déterminant vaut 1 (nous verrons pourquoi dans la suite) *i.e.*

$$|a(\mu)|^2 - g|b(\mu)|^2 = 1, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.1.2.60})$$

Cela assure que $\frac{\ln |a(\mu)|}{g\pi}$ est toujours positif (quel que soit le signe de g d'ailleurs). On peut donc en prendre la racine carrée et on définit

$$\varphi(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{|b(\lambda)|} \sqrt{\frac{\ln |a(\mu)|}{g\pi}}, \quad \varphi^*(\lambda) = \frac{b^*(\lambda)}{|b(\lambda)|} \sqrt{\frac{\ln |a(\mu)|}{g\pi}}. \quad (\text{II.1.2.61})$$

La normalisation choisie assure que les relations canoniques sont vérifiées. Ainsi, la transformation canonique $(\psi(x,t), \psi^*(x,t)) \mapsto (\varphi(\lambda,t), \varphi^*(\lambda,t))$ fournit un autre jeu de variables "action-angle" aux propriétés plus intéressantes. On a en particulier

$$\{h_n, \varphi(\mu)\} = -i\mu^n \varphi(\mu), \quad (\text{II.1.2.62})$$

$$\{h_n, \varphi^*(\mu)\} = i\mu^n \varphi^*(\mu), \quad (\text{II.1.2.63})$$

et donc

$$\varphi(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} \varphi(\lambda), \quad \varphi^*(\lambda, t) = e^{i\lambda^2 t} \varphi^*(\lambda). \quad (\text{II.1.2.64})$$

En anticipant le cas quantique, cette discussion est à mettre en parallèle avec les deux types d'opérateurs création qui émergent de la méthode de diffusion

inverse quantique, à savoir ceux qui engendrent les états de Bethe et ceux correspondant à l'algèbre ZF qui engendrent les états asymptotiques. Pour renforcer encore cet aspect, nous terminons cette section en reliant la matrice de monodromie aux données de diffusion provenant de la théorie standard de diffusion, à savoir les coefficients de réflexion et de transmission pour le problème auxiliaire. Soit $\chi(\lambda, x)$ et $\xi(\lambda, x)$ les *fonctions de Jost* solutions du problème auxiliaire (II.1.2.11). Comme les champs ψ et ψ^* du problème initial tendent vers 0 quand $|x| \rightarrow \infty$, on a le comportement asymptotique suivant

$$\chi(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{II.1.2.65})$$

$$\xi(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{II.1.2.66})$$

Grâce à la propriété de la matrice $L(\lambda, x)$ si $f(\lambda, x)$ est solution de (II.1.2.11) alors $\tilde{f}(\lambda, x) = g^{1/2}Uf^*(\lambda, x)$ l'est aussi (pour $\lambda \in \mathbb{R}$). Les fonctions de Jost ainsi transformées vérifient

$$\tilde{\chi}(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\lambda}{2}x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{II.1.2.67})$$

$$\tilde{\xi}(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\lambda}{2}x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{II.1.2.68})$$

Les couples $(\chi(\lambda, x), \tilde{\chi}(\lambda, x))$ et $(\xi(\lambda, x), \tilde{\xi}(\lambda, x))$ forment chacun une base de solutions du problème auxiliaire et on peut exprimer l'un comme combinaison linéaire de l'autre. Or d'après la définition de la matrice de monodromie $T(\lambda)$ et les comportements asymptotiques ci-dessus, les coefficients reliant les deux bases sont précisément les éléments de $T(\lambda)$

$$\chi(\lambda, x) = a(\lambda)\xi(\lambda, x) + b(\lambda)\tilde{\xi}(\lambda, x), \quad (\text{II.1.2.69})$$

$$\tilde{\chi}(\lambda, x) = gb^*(\lambda)\xi(\lambda, x) + a^*(\lambda)\tilde{\xi}(\lambda, x). \quad (\text{II.1.2.70})$$

En utilisant le *wronskien* de $\chi(\lambda, x)$ et $\tilde{\chi}(\lambda, x)$, on montre que $\det T(\lambda) = 1$ c'est-à-dire la relation (II.1.2.60). Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux vecteurs colonnes de composantes $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $g_1(x)$, $g_2(x)$, leur wronskien est le déterminant de ces vecteurs donné par

$$W(f(x), g(x)) = f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x). \quad (\text{II.1.2.71})$$

Si f et g sont deux solutions du problème spectral, on a la propriété intéressante que leur wronskien est indépendant de x . En particulier, pour le calcul de $W(\chi(\lambda, x), \tilde{\chi}(\lambda, x))$, on peut utiliser le comportement asymptotique pour trouver $W(\chi(\lambda, x), \tilde{\chi}(\lambda, x)) = 1$. Maintenant, en utilisant le changement de base (II.1.2.69, II.1.2.70), on obtient $W(\chi(\lambda, x), \tilde{\chi}(\lambda, x)) = \det T(\lambda)$.

Considérons maintenant la solution $f(\lambda, x)$ du problème spectral correspondant à une onde incidente venant de $+\infty$ et définissant les coefficients de réflexion et de transmission $\rho(\lambda)$ et $\tau(\lambda)$ par son comportement asymptotique

$$f(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} \tau(\lambda)e^{-i\frac{\lambda}{2}x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{II.1.2.72})$$

$$f(\lambda, x) \sim \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}x} \\ \rho(\lambda)e^{i\frac{\lambda}{2}x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{II.1.2.73})$$

On a alors

$$f(\lambda, x) = \xi(\lambda, x) + \rho(\lambda)\tilde{\xi}(\lambda, x) = \tau(\lambda)\chi(\lambda, x), \quad (\text{II.1.2.74})$$

d'où l'on tire

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)}, \quad \rho(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (\text{II.1.2.75})$$

avec la relation d'unitarité

$$|\tau(\lambda)|^2 + g|\rho(\lambda)|^2 = 1. \quad (\text{II.1.2.76})$$

Le coefficient de réflexion peut être pris comme la quantité fondamentale à la base du problème inverse. En effet, à partir de lui, on peut retrouver $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ et donc ψ , ψ^* par l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko [56, 87]. Cela se retrouvera dans le cas quantique et on peut déjà avoir un avant-goût de l'algèbre ZF en calculant les crochets de Poisson de ρ et ρ^*

$$\{\rho(\lambda), \rho(\mu)\} = v.p. \frac{2g}{\lambda - \mu} \rho(\lambda) \rho(\mu), \quad (\text{II.1.2.77})$$

$$\{\rho(\lambda), \rho^*(\mu)\} = \frac{2g}{\lambda - \mu + i0} \rho(\lambda) \rho^*(\mu) + 2i\pi\delta(\lambda - \mu). \quad (\text{II.1.2.78})$$

II.1.2.2 Problème inverse

Dans la section précédente, nous n'avons finalement réalisé "que la moitié" de la méthode de diffusion inverse. Notons cependant que l'on a déjà collecté beaucoup d'informations sur le système, à tel point que pour un problème quantique, l'analogie de cette partie directe est carrément utilisée sous le nom de méthode de diffusion inverse quantique et permet effectivement d'obtenir de nombreuses informations grâce à l'utilisation de *l'ansatz de Bethe algébrique* [46, 47]. Remarquons toutefois que tant au niveau classique que quantique, la partie inverse est importante, ne serait-ce que pour obtenir une solution au problème originel à savoir trouver les fonctions ψ et ψ^* . Ce problème trouve un écho particulier au niveau quantique car il permet d'aborder le calcul de fonctions de corrélation [69]. Nous nous attachons donc à présenter les résultats principaux qui permettent de reconstruire le

champ dont l'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger non-linéaire à partir des données de diffusion. Nous nous attarderons en particulier sur une solution qui peut être établie de façon indépendante mais dont l'interprétation permettra de faire le lien avec les données de diffusion : la solution de Rosales [113]. Encore une fois, cela est motivé par l'importance de cette solution au niveau quantique.

L'exposé qui suit reste (volontairement) très vague quant aux propriétés analytiques des différentes fonctions impliquées et nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple à [4]. Dans tout le début, nous travaillons à un instant t fixé (par exemple $t = 0$) et nous verrons comment la dépendance en t intervient naturellement grâce à l'évolution temporelle de $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ vue précédemment. L'idée de base dans le problème inverse est d'introduire un noyau d'opérateur $K(x, y)$ traduisant le comportement de la fonction ξ en dehors de la limite (II.1.2.66). Comme nous le verrons le point crucial est que le champ ψ s'exprime simplement en fonction de ce noyau et que ce dernier satisfait une équation dite *équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko* [56, 87] faisant intervenir le coefficient de réflexion $\rho(\lambda)$. On écrit donc

$$\xi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}x} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_x^\infty ds \, K(x, s) e^{-i\frac{\lambda}{2}s}, \quad (\text{II.1.2.79})$$

avec

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} K_1(x, y) \\ K_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.2.80})$$

On en déduit

$$\tilde{\xi}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\lambda}{2}x} \end{pmatrix} + \int_x^\infty ds \, \begin{pmatrix} gK_2^*(x, y) \\ K_1^*(x, y) \end{pmatrix} e^{i\frac{\lambda}{2}s}, \quad (\text{II.1.2.81})$$

Le fait que ξ et $\tilde{\xi}$ vérifient (II.1.2.11) pour tout λ (réel) se traduit par un ensemble de contraintes pour K_1 et K_2 , notamment des équations aux dérivées partielles pour lesquelles l'existence et l'unicité d'une solution est assurée dans le cas de Schrödinger non-linéaire [56]. Cela conduit également à la relation

$$\psi(x) = -iK_2(x, x). \quad (\text{II.1.2.82})$$

Nous appliquons maintenant l'opérateur intégration suivant

$$\int_C \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\frac{\lambda}{2}y} \quad (\text{II.1.2.83})$$

sur la relation (II.1.2.74) où C est un contour d'intégration dans le plan complexe partant de $-\infty + i0^+$ jusqu'à $+\infty + i0^+$ en passant au-dessus de

tous les zéros de $a(\lambda)$. En tenant des propriétés de $\chi(\lambda, x)$, $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ dans le plan complexe et de $y > x$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\lambda}{2\pi} \int_x^\infty ds \begin{pmatrix} K_1(x, y) \\ K_2(x, y) \end{pmatrix} e^{i\frac{\lambda}{2}(y-s)} + \int_C \frac{d\lambda}{2\pi} \rho(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\lambda}{2}(x+y)} \end{pmatrix} \\ + \int_C \frac{d\lambda}{2\pi} \rho(\lambda) \int_x^\infty ds \begin{pmatrix} gK_2^*(x, y) \\ K_1^*(x, y) \end{pmatrix} e^{i\frac{\lambda}{2}(s+y)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.84})$$

En notant que

$$\int_C \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\frac{\lambda}{2}x} = \delta(x), \quad (\text{II.1.2.85})$$

et en définissant

$$F(x) = \int_C \frac{d\lambda}{2\pi} \rho(\lambda) e^{i\frac{\lambda}{2}x}, \quad (\text{II.1.2.86})$$

on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} K_1(x, y) = -g \int_x^\infty ds K_2^*(x, s) F(y + s), \\ K_2(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty ds K_1^*(x, s) F(y + s) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.1.2.87})$$

En principe, étant donné le coefficient de réflexion, on peut donc résoudre en K_2 pour obtenir ψ en fonction de ρ : le problème inverse est alors résolu. Pour le cas qui nous occupe, l'existence et l'unicité de la solution de ces équations est prouvée (voir par exemple [104]). L'influence des zéros de $a(\lambda)$ dans le demi-plan supérieur est entièrement contenue dans F et a des conséquences importantes sur les solutions. En particulier, ce sont grâce à ces zéros que l'on peut construire des solutions du type "soliton" pour les équations intégrables traitables par cette méthode (équation de Schrödinger non-linéaire, de Korteweg-de Vries, de sine-Gordon, etc). Par définition (en terme des fonctions de Jost et de leurs wronskiens), $a(\lambda)$ ne peut avoir des zéros que dans le demi-plan supérieur. Si on suppose que $a(\lambda)$ a des zéros simples isolés $\zeta_j = \lambda_j + i\eta_j$, $\eta_j > 0$, $j = 1, \dots, n_a$, on obtient

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{2\pi} \rho(\lambda) e^{i\frac{\lambda}{2}x} - i \sum_{j=1}^{n_a} \frac{b(\zeta_j)}{a'(\zeta_j)} e^{i\frac{\zeta_j}{2}x}. \quad (\text{II.1.2.88})$$

Il se trouve que le signe de g influe sur la possibilité d'avoir de telles valeurs discrètes et en particulier pour $g > 0$, il n'y en a pas. Au niveau quantique, cela aura la conséquence profonde de pouvoir reconstruire le champ quantique à partir de l'algèbre ZF et de pouvoir montrer la complétude asymptotique des états engendrés par les opérateurs de l'algèbre ZF de la façon décrite dans la première partie de ce manuscrit.

Si on oublie donc la contribution de ces valeurs discrètes pour la suite, on peut résumer les résultats du problème inverse comme suit: le champ $\psi(x)$ gouverné par l'équation de Schrödinger non-linéaire est donné par

$$\psi(x) = -iK(x, x), \quad (\text{II.1.2.89})$$

où le noyau $K(x, y)$ est la solution de l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko

$$K(x, y) + F(x + y) = g \int_x^\infty \int_x^\infty ds_1 ds_2 F^*(s_1 + s_2) K(x, s_1) F(s_2 + y) \quad (\text{II.1.2.90})$$

avec

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{2\pi} \rho(\lambda) e^{i\frac{\lambda}{2}x} \quad (\text{II.1.2.91})$$

et $\rho(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$ est le coefficient de réflexion déterminé par le problème auxiliaire (II.1.2.11). Ainsi, on peut obtenir ψ comme fonction de ρ . En outre, on connaît l'évolution dans le temps du coefficient de réflexion. C'était l'une des préoccupations majeures du problème direct et on a

$$\rho(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t} \rho(\lambda). \quad (\text{II.1.2.92})$$

Il est alors possible d'obtenir $\psi(x, t)$ comme fonction de $\rho(\lambda, t)$. Voyons cela un peu plus en détail. L'idée qui vient immédiatement est d'utiliser la série de Neumann associée à l'équation intégrale linéaire (II.1.2.90) dont on peut montrer qu'elle converge absolument pour $g > 0$ ou $g < 0$ et $|\rho(\lambda)| > 1$ [3]. En pratique, il s'agit d'itérer l'équation (II.1.2.90) pour obtenir une expression de $K(x, x)$ ne faisant intervenir que F

$$\begin{aligned} K(x, x) = F(2x) + \sum_{n=1}^\infty g^n \int_x^\infty d^{2n} z F^*(z_1 + z_2) \dots F^*(z_{2n-1} + z_{2n}) \\ \times F(x + z_{2n-1}) F(z_{2n} + z_{2n-3}) \dots F(z_4 + z_1) F(z_2 + x). \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.93})$$

En utilisant (II.1.2.91), on peut calculer chaque terme du membre de droite. Cela fait intervenir des expressions du type

$$\int_x^\infty dz e^{-ikz} = \frac{-ie^{-ikx}}{k - i\varepsilon}, \quad (\text{II.1.2.94})$$

pour lesquels on a utilisé une prescription "en $i\varepsilon$ " (ε étant un réel positif tendant vers 0). On obtient alors finalement pour $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^\infty g^n \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{d^n p d^{n+1} q}{(2\pi)^{2n+1}} \mathbf{r}^*(p_1) \dots \mathbf{r}^*(p_n) \mathbf{r}(q_{n+1}) \dots \mathbf{r}(q_1) \\ \times \frac{e^{-i(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^{n+1} q_j)x}}{\prod_{j=1}^n (q_j - p_j + i\varepsilon)(p_j - q_{j+1} - i\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.95})$$

avec $\mathbf{r}(\lambda) = -2\rho(\lambda)$. En utilisant (II.1.2.92), on en déduit la réponse finale pour le champ dépendant du temps $\psi(x, t)$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{d^n p \, d^{n+1} q}{(2\pi)^{2n+1}} \mathbf{r}^*(p_1) \dots \mathbf{r}^*(p_n) \mathbf{r}(q_{n+1}) \dots \mathbf{r}(q_1) \\ \times \frac{e^{-i(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^{n+1} q_j)x + i(\sum_{j=1}^n p_j^2 - \sum_{j=1}^{n+1} q_j^2)t}}{\prod_{j=1}^n (q_j - p_j + i\varepsilon)(p_j - q_{j+1} - i\varepsilon)}. \quad (\text{II.1.2.96}) \end{aligned}$$

On peut vérifier explicitement ordre par ordre que l'expression précédente est bien solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (II.1.1.4). Cette méthode de la transformée inverse est souvent vue comme une généralisation de la transformée de Fourier pour un problème non-linéaire. La forme explicite obtenue ci-dessus illustre parfaitement ce propos. A "l'ordre 0", le champ est tout simplement la transformée de Fourier du coefficient de réflexion et tous les termes suivants sont là pour tenir compte du terme cubique. L'itération de l'équation (II.1.2.90) qui contenait la constante de couplage g produit une solution dont la forme rappelle un développement en puissance de la constante de couplage. En fait, cela est à la base de l'approche considérée par R.R. Rosales dans un papier fondateur [113] dont l'idée est d'appliquer une procédure itérative et de sommer la série qui en résulte. L'équation de Marchenko découle naturellement de l'approche et les différentes composantes de la solution (spectre continu et/ou discret) se retrouvent par simple choix de la mesure utilisée. Cette méthode est appliquée à de nombreuses équations non-linéaires et dans le cas de Schrödinger non-linéaire, la solution précédente est retrouvée ainsi que des solutions multi-solitons mises en évidence par R. Hirota [66]. Partant d'un développement

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(x, t), \quad (\text{II.1.2.97})$$

avec $\psi_n \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, Rosales se ramène à la détermination d'une fonction $\Phi_n(k_1, \dots, k_n)$ en écrivant ψ_n sous la forme

$$\psi_n(x, t) = \int_{\mathbb{C}^n} \Phi_n(k_1, \dots, k_n) e^{i\Omega_n} d\lambda(k_1) \dots d\lambda(k_n) \quad (\text{II.1.2.98})$$

où $d\lambda$ est une mesure sur \mathbb{C} et avec

$$\Omega_n = \sum_{j=1}^n (k_j x + (-1)^j k_j^2 t). \quad (\text{II.1.2.99})$$

Le résultat final s'écrit, pour $n \geq 0$ et $m = 2n + 1$,

$$\psi_m(x, t) = \varepsilon^m (-g)^n \int_{\mathbb{C}^m} \frac{e^{i\Omega_m}}{\prod_{j=0}^{2n} (k_j + k_{j+1})} \prod_{j=0}^n d\lambda(k_{2j+1}) \prod_{j=1}^n d\mu(k_{2j}) \quad (\text{II.1.2.100})$$

avec $d\mu^*(-k^*) = d\lambda(k)$. Cette relation particulière vient de la présence de ψ^* dans le terme non-linéaire. Ensuite en jouant sur les mesures, il est possible de reproduire les résultats de la méthode inverse de diffusion. Par exemple, en prenant une mesure purement discrète, on retrouve la solution de [66]. Et en introduisant la mesure continue $d\lambda(k) = \mathfrak{r}(k)dk$ définie sur \mathbb{R} où $\mathfrak{r}(k)$ est donné comme dans (II.1.2.95), on retrouve le résultat obtenu par la méthode inverse. Bien entendu, de façon générale, il est aussi possible de mélanger mesure discrète et continue pour obtenir les solutions faisant intervenir les solutions de type "soliton" et "radiation" [74]. Enfin en définissant certains opérateurs agissant sur l'espace $L^2(d\lambda)$, Rosales parvient à resommer cette série pour tout ε et pour tout $g > 0$.

Chapitre 2

L'équation de Schrödinger non linéaire quantique

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la possibilité de quantifier toute la démarche présentée dans le chapitre précédent pour le cas classique. Il est remarquable que cette entreprise ait été couronnée de succès car il est bien connu que la quantification canonique (qui est celle qui a été utilisée) devient extrêmement ardue pour des problèmes non-linéaires. Comme nous le verrons, de nombreux auteurs ont apporté leur pierre à cet édifice s'attaquant à divers aspects mais globalement nous suivrons une ligne de conduite très proche de celle de l'école russe de St-Petersbourg. Nous attirons cependant l'attention du lecteur sur l'excellente revue de E. Gutkin [62] qui a entrepris une analyse rigoureuse et critique de ces développements éclairée par son approche des opérateurs d'entrelacement qui permet de prouver certains résultats fondamentaux de la méthode de diffusion inverse quantique souvent obtenus par des raisonnements formels. Gardant cela à l'esprit, nous présenterons les résultats comme ils se sont imposés historiquement, privilégiant les idées fondamentales à la précision des démonstrations. En fait, dans notre présentation du cas classique, nous avons déjà volontairement orienté la discussion pour faire ressortir ce qui est au coeur de toute cette approche : la possibilité de transformer les degrés de liberté de certains problèmes non-linéaires (en particulier Schrödinger non-linéaire) en degrés de liberté obéissant à un problème linéaire. Ainsi, tout comme pour un problème linéaire, on décompose le champ en modes par transformation de Fourier pour ensuite quantifier canoniquement ces modes, pour le problème non-linéaire considéré la partie directe de la méthode de diffusion inverse fournit une "transformation de Fourier non-linéaire" permettant d'obtenir des modes ayant les propriétés requises pour permettre une quantification tout aussi simple que dans le cas linéaire. En utilisant la transformation inverse, on obtient alors le champ quantique de la théorie. Comme nous le verrons, cette partie est cruciale et concentre les principales difficultés de cette approche : montrer que le champ obtenu satisfait l'équation d'évolution et les relations de commutation canoniques en utilisant l'analogie quantique de la solution à la Rosales.

II.2.1 Méthode de diffusion inverse quantique

L'un des enjeux principaux dans la quantification de fonctionnelles de variables classiques canoniques est la question de l'ordre des opérateurs quantiques correspondants. Dans ce qui suit *l'ordre normal* (voir par exemple [9]) sera utilisé comme prescription pour associer un opérateur quantique à une fonctionnelle classique. Cela est basé sur l'existence de champs quantiques canoniques Ψ et Ψ^\dagger formant une représentation des relations de commutation canoniques sur l'espace de Fock de la théorie considérée. Ces opérateurs permettent de représenter des états et des opérateurs de l'espace de Fock. En effet, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ définit un état $|f\rangle$ dans \mathcal{H}^N (cf la sous-section I.2.2.2) par

$$|f\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} d^N x f(x_1, \dots, x_N) \Psi^\dagger(x_1) \dots \Psi^\dagger(x_N) \Omega. \quad (\text{II.2.1.1})$$

Soit maintenant $k(x_1, \dots, x_M | y_1, \dots, y_N) \equiv k(x|y)$ une distribution sur $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$, elle permet de définir un opérateur K sur l'espace de Fock

$$K = \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^N} d^M x d^N y k(x|y) \Psi^\dagger(x_1) \dots \Psi^\dagger(x_M) \Psi(y_1) \dots \Psi(y_N). \quad (\text{II.2.1.2})$$

Cette représentation est la *forme normale* de l'opérateur K . Dans la suite, on prendra le cas $M = N$ qui assure que K commute avec l'opérateur nombre de particules : on travaille à nombre de particules fixé *i.e.* notre espace de base est \mathcal{H}^N . Tout cela permet de définir la notion *d'ordre normal* qui est simplement l'extension de ce qu'on vient de voir à un opérateur \mathcal{K} agissant sur l'espace de Fock comme K sur chaque sous-espace \mathcal{H}^N . Soit $k_i(x|y)$ de dimension $n_i \times n_i$, i parcourant un ensemble d'indices donné, et K_i l'opérateur sous forme normale correspondant. Si l'opérateur $\mathcal{K} = \sum_i K_i$ converge (dans

un sens approprié) alors cela définit un opérateur sur l'espace de Fock dit ordonné normalement. En pratique, on résume souvent tout cela en disant que l'ordre normal consiste à placer les champs Ψ^\dagger à gauche des champs Ψ et on s'en sert pour quantifier une fonctionnelle $X(\psi, \psi^*)$. Il y a deux étapes : d'abord on substitue Ψ à ψ et Ψ^\dagger à ψ^* dans X puis on ordonne normalement l'expression obtenue en plaçant tous les Ψ^\dagger à gauche des Ψ en préservant par ailleurs l'ordre entre les champs. Cette opération est souvent notée : $:$.

II.2.1.1 Quantification du problème direct

La première tâche est de définir la matrice de transition quantique que nous continuerons à noter $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ sans craindre de perdre le lecteur. Partant de la version quantique du problème auxiliaire

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & ig\Psi^\dagger \\ -i\Psi & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.1.3})$$

on peut montrer [119, 62] que la matrice de transition quantique est bien donnée par la quantification canonique prescrite par l'ordre normal de la matrice de transition classique. Ainsi, pour $x_1 < x_2$,

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{x_1}^{x_2}(\lambda) & gB_{x_1}^{x_2\dagger}(\lambda) \\ B_{x_1}^{x_2}(\lambda) & A_{x_1}^{x_2\dagger}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.1.4})$$

avec

$$\begin{aligned} A_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int \dots \int_{x_1 < \xi_1 < \dots < \xi_{2n} < x_2} d^{2n}\xi e^{i\lambda(\xi_{2n}-\xi_{2n-1}+\dots-\xi_1)} \\ \times \Psi^\dagger(\xi_{2n}) \dots \Psi^\dagger(\xi_2) \Psi(\xi_{2n-1}) \dots \Psi(\xi_1), \end{aligned} \quad (\text{II.2.1.5})$$

$$\begin{aligned} B_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -ie^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2+x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int \dots \int_{x_1 < \xi_1 < \dots < \xi_{2n+1} < x_2} d^{2n+1}\xi e^{i\lambda(-\xi_{2n+1}+\xi_{2n}+\dots-\xi_1)} \\ \times \Psi^\dagger(\xi_{2n}) \dots \Psi^\dagger(\xi_2) \Psi(\xi_{2n+1}) \dots \Psi(\xi_1), \end{aligned} \quad (\text{II.2.1.6})$$

et où l'adjoint † est à prendre au sens de (I.2.2.39). En raison des relations de commutations des champs quantiques, la relation (II.1.2.18) est toujours vraie mais pour $x_1 < x_2 < x_3$. Guidés par les résultats classiques, on voit que le point central de la partie directe du problème maintenant est de calculer les relations de commutations des entrées de la matrice de transition et de la matrice de monodromie quantiques. Au niveau classique, cela faisait appel au *formalisme de la matrice- r* , r étant la matrice (II.1.2.30). Au niveau quantique, nous allons voir qu'un formalisme analogue, dit *formalisme de la matrice- R* va apparaître où R pourra être vue comme la quantification de r et sera donnée par la matrice R de Yang (I.3.1.7).

Une petite discussion s'impose avant de formuler les résultats. Dans [119], la méthode pour obtenir (II.1.2.29) est basée sur l'idée que deux quantités sont égales si elles satisfont la même équation différentielle du premier ordre avec la même condition initiale et fait appel à la relation (II.1.2.17) définissant la matrice de transition classique. Cette méthode est critiquée dans [62] sous le nom "d'approche de l'équation différentielle" et une méthode alternative est donnée pour arriver au même résultat de façon rigoureuse. Il se trouve que cette situation se reproduit au niveau quantique : dans [119], l'analogue quantique de (II.1.2.29) est obtenu en utilisant une version quantique de l'approche de l'équation différentielle. Il est remarquable tout de même que le résultat final soit en accord avec le résultat obtenu rigoureusement dans [62] par une méthode d'approximation discrète. Cela s'écrit

$$R_{12}(\lambda - \mu) T_{1;x_1}^{x_2}(\lambda) T_{2;x_1}^{x_2}(\mu) = T_{2;x_1}^{x_2}(\mu) T_{1;x_1}^{x_2}(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu), \quad (\text{II.2.1.7})$$

avec

$$R_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + ir_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - i\frac{g}{u}P_{12}, \quad (\text{II.2.1.8})$$

i.e. R est la matrice R de Yang. Pour faire la correspondance entre g et le paramètre de déformation de (I.3.1.7), il faut réintroduire la constante de Planck \hbar normalement présente dans les relations de commutation canoniques (et que nous avons prise égale à 1) pour obtenir $R_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + i\hbar r_{12}(u)$. Alors dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, en notant que $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ est la matrice de transition classique et que $[\ , \] \rightarrow -i\hbar\{ \ , \ }$, la relation (II.2.1.7) redonne (II.1.2.29).

Il faut maintenant en déduire les relations pour la matrice de monodromie quantique obtenue dans la limite de volume infinie *i.e.* pour $x_1 \rightarrow -\infty$ et $x_2 \rightarrow \infty$. Par analogie avec le cas classique et toujours en gardant les mêmes notations, on définit

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \left(e^{i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x_2} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) e^{-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x_1} \right) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & gB^\dagger(\lambda) \\ B(\lambda) & A^\dagger(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.1.9})$$

avec dans l'idée que les éléments $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et leurs adjoints sont les opérateurs ordonnés normalement correspondant à $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ et leurs conjugués. Encore une fois, les approches divergent entre [119] et [62] mais produisent tout de même les mêmes conclusions pour les relations auxquelles on peut donner un sens précis. Dans [119], la limite de volume infinie est calculée directement pour la relation (II.2.1.7) et les relations d'échange pour les éléments en sont extraites. Dans [62], une discussion importante est dédiée à la signification de la limite de volume infinie pour un opérateur et en particulier pour $T(\lambda)$. Il en résulte que la stratégie est plutôt d'extraire les relations d'échange pour les éléments de la matrice de transition et de tenter d'obtenir rigoureusement la limite de volume infini pour chacune d'entre elles. Ces relations peuvent être codées dans le formalisme de la matrice R [119] de la façon suivante

$$R_{12}^+(\lambda - \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) = T_2(\mu) T_1(\lambda) R_{12}^-(\lambda - \mu), \quad (\text{II.2.1.10})$$

avec

$$R_{12}^+(\lambda) = \left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{ig}{\lambda + i0} \sigma_1^+ \sigma_2^- \right) R_{12}(\lambda) \left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{ig}{\lambda - i0} \sigma_1^- \sigma_2^+ \right), \quad (\text{II.2.1.11})$$

$$R_{12}^-(\lambda) = \left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{ig}{\lambda - i0} \sigma_1^+ \sigma_2^- \right) R_{12}(\lambda) \left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{ig}{\lambda + i0} \sigma_1^- \sigma_2^+ \right), \quad (\text{II.2.1.12})$$

et σ^+ , σ^- définies par (II.1.2.26). Tout comme dans le cas classique, il y a

six relations indépendantes qui s'écrivent

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [A(\lambda), A^\dagger(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad (\text{II.2.1.13})$$

$$B(\lambda)A(\mu) = \left(1 - \frac{ig}{\lambda - \mu - i0}\right) A(\mu)B(\lambda), \quad (\text{II.2.1.14})$$

$$A(\lambda)B^\dagger(\mu) = \left(1 + \frac{ig}{\lambda - \mu + i0}\right) B^\dagger(\mu)A(\lambda), \quad (\text{II.2.1.15})$$

$$B(\lambda)B^\dagger(\mu) = \left(1 + \frac{ig}{\lambda - \mu + i0}\right) \left(1 - \frac{ig}{\lambda - \mu - i0}\right) B^\dagger(\mu)B(\lambda) + 2\pi\delta(\lambda - \mu)A^\dagger(\lambda)A(\mu). \quad (\text{II.2.1.16})$$

On remarque tout de suite la difficulté soulevée par la dernière relation qui fait apparaître un produit de deux distributions. Cela est remarqué dans [119] et un changement de variables est opéré pour s'affranchir de ce problème. Ce changement de variables correspond à (II.1.2.61) et produit (formellement) des opérateurs satisfaisant les relations de commutation canoniques. En réalité, il est montré dans [62] que les deux dernières relations ne peuvent pas être vues comme des relations d'échange pour des opérateurs (ou même des densités d'opérateurs) tandis que les quatre premières sont établies sous la même forme. Cependant, que ce soit formellement ou en utilisant la méthode de [62], le point important en vue de la résolution du problème inverse est la possibilité de définir l'analogue quantique du coefficient de réflexion ρ et son adjoint. Avant de discuter cela, notons brièvement le rôle important de l'opérateur $B^\dagger(\lambda)$ dans la construction d'états propres de Bethe [127]. En effet, en utilisant la forme normale de $B^\dagger(\lambda)$ déduite de (II.2.1.6) et la fonction (I.1.3.49) définissant un état de Bethe noté $|k_1, \dots, k_N\rangle_{BA}$, on obtient pour λ différent de k_j , $j = 1, \dots, N$,

$$B^\dagger(\lambda)|k_1, \dots, k_N\rangle_{BA} = |\lambda, k_1, \dots, k_N\rangle_{BA} + \text{termes supplémentaires} \quad (\text{II.2.1.17})$$

On peut montrer par récurrence que les termes supplémentaires sont nuls grâce au fait que les fonctions d'onde de Bethe satisfont la condition au bord (I.1.3.37) correspondant à l'interaction δ (voir [62] pour plus de détails). En d'autres termes, l'opérateur $B^\dagger(\lambda)$ est l'opérateur création des états propres de l'ansatz de Bethe correspondant au problème des N particules en interaction de contact discuté dans la première partie de ce manuscrit. Cela permet d'interpréter physiquement le paramètre spectral λ comme une impulsion et nous reviendrons à la notation k dans la suite. Notons en outre que la commutation de $A(\lambda)$ et $A(\mu)$ au niveau quantique permet d'utiliser $A(\lambda)$ (ou $\ln A(\lambda)$) comme générateur des quantités conservées. En effectuant un développement en λ^{-1} , on peut effectivement identifier l'Hamiltonien quantique du système. Nous allons finir de renforcer les relations entre l'équation de Schrödinger non-linéaire quantique et le problème à N corps en discutant les propriétés du coefficient de réflexion quantique \mathfrak{R} et de son adjoint \mathfrak{R}^\dagger . On définit

$$\mathfrak{R}(k) = A^{-1}(k)B(k) \text{ alors } \mathfrak{R}^\dagger(k) = B^\dagger(k)A^{\dagger-1}(k). \quad (\text{II.2.1.18})$$

En utilisant les relations d'échange (II.2.1.13, II.2.1.16), on obtient rapidement

$$\mathfrak{R}(k_1)\mathfrak{R}(k_2) = \frac{k_2 - k_1 - ig}{k_2 - k_1 + ig} \mathfrak{R}(k_2)\mathfrak{R}(k_1), \quad (\text{II.2.1.19})$$

$$\mathfrak{R}^\dagger(k_1)\mathfrak{R}^\dagger(k_2) = \frac{k_2 - k_1 - ig}{k_2 - k_1 + ig} \mathfrak{R}^\dagger(k_2)\mathfrak{R}^\dagger(k_1), \quad (\text{II.2.1.20})$$

$$\mathfrak{R}(k_1)\mathfrak{R}^\dagger(k_2) = \frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig} \mathfrak{R}^\dagger(k_2)\mathfrak{R}(k_1) + 2\pi\delta(k_1 - k_2). \quad (\text{II.2.1.21})$$

Ces relations sont aussi celles obtenues dans [62] c'est pourquoi nous nous sommes autorisés à les calculer formellement. On reconnaît immédiatement les relations de définition de l'algèbre ZF (I.2.2.27-I.2.2.29) dans le cas scalaire (la dimension des espaces auxiliaires est $n = 1$) avec la matrice \mathbf{S} suivante

$$\mathbf{S}(k_1, k_2) = S(k_1 - k_2) = \frac{k_1 - k_2 - ig}{k_1 - k_2 + ig}. \quad (\text{II.2.1.22})$$

A ce stade, on voit facilement que la version vectorielle de l'équation de Schrödinger quantique (pour n degrés internes) redonnerait la matrice \mathbf{S}_{12} obtenue par C.N. Yang et discutée dans la première partie. Bien que $\mathfrak{R}(k)$ et $\mathfrak{R}^\dagger(k)$ ne satisfassent pas les relations de commutation canoniques et ne puissent donc pas être pris comme variables "action-angle" (au sens de Sklyanin), ils permettent néanmoins de diagonaliser la hiérarchie

$$H_{QNL}^{(p)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} k^p \mathfrak{R}^\dagger(k)\mathfrak{R}(k) \quad , \quad p \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.2.1.23})$$

Enfin, d'après les discussions de la première partie, on sait que $\mathfrak{R}^\dagger(k)$ engendre les états asymptotiques du modèle à partir du vide Ω . On sait aussi que $\mathfrak{R}^\dagger(k)$ et $\mathfrak{R}(k)$ permettent de calculer la matrice de diffusion du problème grâce à leurs relations d'échange, exhibant toutes les propriétés d'une théorie factorisable.

II.2.1.2 Quantification de la solution

Une très large littérature a été consacrée à la possibilité de mettre en oeuvre une version quantique du problème inverse avec diverses approches et différents niveaux de rigueur (voir par exemple [31, 32, 34, 35, 60, 74, 125] cette liste n'étant pas exhaustive). De façon générale, il ressort de ces travaux qu'il est possible de calquer la résolution classique basée sur l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko. Nous nous inspirons particulièrement du papier de B. Davies [32] qui contient les étapes essentielles du problème inverse quantique. L'idée est de suivre les résultats classiques en utilisant les opérateurs $\mathfrak{R}(k)$ et $\mathfrak{R}^\dagger(k)$ à la place de $\mathfrak{r}(k)$ et $\mathfrak{r}^*(k)$ dans (II.1.2.95). Une attention particulière doit être donnée à l'ordre des opérateurs et le point crucial de [32] réside précisément dans le fait qu'il faut maintenir l'ordre qui apparaît naturellement par itération de l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko. En

d'autres termes, la solution à la *Rosales* reste valide au niveau quantique pourvu que les coefficients de réflexion soient promus en opérateurs quantiques vérifiant les relations de l'algèbre ZF. En effet, en spécifiant alors un ordre pour traiter le terme cubique¹ de l'équation de Schrödinger non-linéaire et en supposant $g > 0$, on peut montrer les résultats suivants :

L'opérateur (plus précisément la densité d'opérateur) $\Psi(x)$ donné par

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{d^n p \, d^{n+1} q}{(2\pi)^{2n+1}} \mathfrak{R}^\dagger(p_1) \dots \mathfrak{R}^\dagger(p_n) \mathfrak{R}(q_{n+1}) \dots \mathfrak{R}(q_1) \\ \times \frac{e^{-i(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^{n+1} q_j)x}}{\prod_{j=1}^n (q_j - p_j + i\varepsilon)(p_j - q_{j+1} - i\varepsilon)}, \quad (\text{II.2.1.24})$$

évolue dans le temps selon

$$\Psi(x, t) = e^{itH_{Q^{NLS}}^{(2)}} \Psi(x) e^{-itH_{Q^{NLS}}^{(2)}} \quad (\text{II.2.1.25})$$

et en particulier vérifie l'équation de Schrödinger non-linéaire quantique

$$(i\partial_t + \partial_x^2) \Psi(x, t) = 2g : \Psi \Psi^\dagger \Psi : (x, t), \quad (\text{II.2.1.26})$$

et enfin, est un champ quantique local satisfaisant les relations de commutation canoniques

$$[\Psi(x, t), \Psi(y, t)] = [\Psi^\dagger(x, t), \Psi^\dagger(y, t)] = 0, \quad (\text{II.2.1.27})$$

$$[\Psi(x, t), \Psi^\dagger(y, t)] = \delta(x - y). \quad (\text{II.2.1.28})$$

Cette connaissance explicite du champ a deux conséquences importantes. D'une part, elle permet de calculer les fonctions de corrélation à N points dépendantes du temps (à température nulle) et d'autre part, en théorie de la diffusion, l'opérateur $\Psi(x, t)$ fournit les états de la théorie en interaction qui interpolent entre les états asymptotiques *in* et *out*. En effet, les espaces engendrés par les états du type $\Psi^\dagger(x_1, t) \dots \Psi^\dagger(x_N, t) \Omega$ sont denses dans le sous-espace de Fock à N particules \mathcal{H}^N . En outre, en faisant appel à des fonctions d'habillage et à leur transformée de Fourier, on peut montrer les limites suivantes (dans un sens qui peut être rendu rigoureux en termes d'opérateurs, voir par exemple [53])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}^\dagger(k_1, t) \dots \tilde{\Psi}^\dagger(k_N, t) \Omega = \mathfrak{R}^\dagger(k_N) \dots \mathfrak{R}^\dagger(k_1) \Omega, \quad (\text{II.2.1.29})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\Psi}^\dagger(k_1, t) \dots \tilde{\Psi}^\dagger(k_N, t) \Omega = \mathfrak{R}^\dagger(k_1) \dots \mathfrak{R}^\dagger(k_N) \Omega, \quad (\text{II.2.1.30})$$

pour $k_1 > \dots > k_N$ et où

$$\tilde{\Psi}^\dagger(k, t) = \int_{\mathbb{R}} dx \, e^{ikx - ik^2 t} \Psi^\dagger(x, t). \quad (\text{II.2.1.31})$$

1. Remarquons à ce sujet que l'ordre proposé par Davies n'est pas correct et qu'il faut plutôt utiliser la prescription décrite dans [53].

Nous voulons maintenant revenir un peu sur la version vectorielle du problème. La généralisation de tous les résultats précédents peut se faire très facilement dans le cas avec n degrés internes de liberté grâce à l'utilisation des espaces auxiliaires et à l'algèbre ZF correspondante (cf (I.2.2.27-I.2.2.29)). La nouveauté dans ce cas réside dans la possibilité d'exploiter l'analogie vectorielle de la relation de type FRT (II.2.1.10). Dans ce cas, la matrice $T(\lambda)$ est de taille $(n+1) \times (n+1)$. Soit alors $\tilde{T}(\lambda)$ la sous-matrice de taille $n \times n$ et $D(\lambda)$ le scalaire en position $(n+1, n+1)$ (pour $n=1$, ce n'est autre que $A^\dagger(\lambda)$). On obtient alors les relations suivantes [93]

$$R_{12}(\lambda - \mu) \tilde{T}_1(\lambda) \tilde{T}_2(\mu) = \tilde{T}_2(\mu) \tilde{T}_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu), \quad (\text{II.2.1.32})$$

$$[\tilde{T}(\lambda), D(\mu)] = 0, \quad (\text{II.2.1.33})$$

$$[D(\lambda), D(\mu)] = 0. \quad (\text{II.2.1.34})$$

Les deux dernières relations montrent que la hiérarchie contenue dans $D(\lambda)$, dont on montre qu'elle contient l'Hamiltonien $H_{Q_{NLS}}^{(2)}$ admet pour symétrie l'algèbre engendrée par les éléments (rangés dans) $\tilde{T}(\lambda)$. Maintenant, la première relation montre que l'algèbre en question est $\mathcal{Y}(n)$, le Yangien de $gl(n)$ défini dans la section I.3.1. Nous renvoyons aussi le lecteur à [97] où le cas $sl(2)$ avait été traité en détail (et le lien avec l'approche discutée dans la chapitre suivant établi). Il est possible de donner une réalisation des générateurs du Yangien en termes des générateurs de l'algèbre ZF [93]. En fait, cette situation est un cas particulier du traitement possible grâce à la notion d'opérateur bien élevé [108] et dans l'article [II], cette notion a été explicitement utilisée pour étendre cette réalisation au cas du super-Yangien.

Chapitre 3

Modèles de spins dynamiques

Nous avons terminé le chapitre précédent sur le fait que la version vectorielle de l'équation de Schrödinger non-linéaire quantique possède une algèbre de symétrie étendue donnée par le Yangien [40]. Cette situation a des précédents qui ont contribué à l'établissement des systèmes intégrables quantiques tels qu'ils sont abordés aujourd'hui. Des exemples célèbres sont les modèles de spins dynamiques [11] de type Calogero-Sutherland [22, 121] ou encore les chaînes de spins de type Haldane-Shastry [63, 115] qui possèdent également la symétrie yangienne [11, 64]. Une structure de Yangien classique fut également identifiée pour le modèle de Euler-Calogero-Moser dans [7].

Il est intéressant de noter que, au moins dans le papier fondateur [11], l'approche peut être vue comme un renversement de point de vue dans le sens où, partant de la structure algébrique désirée, on extrait un Hamiltonien gouvernant un système quantique donné via une représentation en terme *d'opérateurs de Dunkl* [42]. En fait cette stratégie est bien connue pour les chaînes de spin de type Heisenberg et fut l'une des applications de la méthode de diffusion inverse quantique dont nous avons déjà parlé (voir par exemple [124] pour une revue). En résumé, l'idée est de construire une quantité dépendant d'un paramètre (spectral) dont on peut montrer qu'elle engendre des quantités en involution grâce à la relation FRT. On identifie ensuite parmi ces quantités un Hamiltonien dont on peut déterminer le spectre.

Pour un système de spins dynamiques, l'idée est de "décaler" le paramètre spectral dans la relation FRT grâce à des *opérateurs de Dunkl*. Ces opérateurs peuvent être vus comme des opérateurs impulsion généralisés tenant compte de l'interaction du système intégrable que l'on veut étudier. Cela a donc pour effet "d'injecter" une dynamique au système. En adaptant la méthode connue pour les chaînes de spins, on peut également identifier l'Hamiltonien du système (qui s'exprime en fonction des opérateurs de Dunkl) dans l'ensemble de quantités en involution. Le bonus dans cette approche est que l'on identifie aussi immédiatement l'algèbre de symétrie donnée par la relation FRT. C'est cette approche que nous nous proposons de présenter ici car elle fut à l'origine des résultats obtenus dans l'article [III].

II.3.1 Interactions intégrables

La notion d'opérateur impulsion généralisé est à la base de l'article de A.P. Polychronakos [105] sur lequel nous nous appuyons pour présenter les modèles intégrables qui vont nous intéresser à savoir les généralisations des modèles de Calogero-Sutherland à des particules avec degrés internes de liberté. Ces modèles représentent des systèmes de N particules identiques non-relativistes de potentiel d'interaction du type $1/r^2$ avec des variantes sur la façon de mesurer la distance entre particules donnant lieu à des potentiels en $1/\sin^2 r$, $1/\sinh^2 r$ ou $1/\wp^2(r)$, \wp étant la fonction de Weierstrass. Les particules sont aussi couplées par leurs degrés internes de liberté. Ces systèmes peuvent être décrits grâce au système de racines des algèbre de Lie de type A_n . En considérant les autres types de systèmes de racines des algèbres de Lie simples, on peut généraliser les potentiels d'interaction qui brisent alors l'invariance par translation et/ou par permutation [99]. Le cas du système de racines de type BC_N est à la base du travail effectué pendant ma thèse dont les résultats sont reportés dans l'article [III].

La motivation pour introduire des opérateurs impulsion généralisés est à mettre en parallèle avec les résultats présentés dans les chapitres précédents : pour un système en interaction, on essaie de se ramener à un formalisme libre et linéaire (cf les variables "action-angle" ou l'algèbre ZF qui permettent d'écrire une hiérarchie avec interaction sous forme libre). Ainsi, nous allons voir qu'une fois ces opérateurs identifiés, les preuves d'intégrabilité des systèmes correspondants deviennent très simples. On note x_j , p_j , $j = 1, \dots, N$ les opérateurs position et impulsion des particules et \mathcal{P}_{ij} l'opérateur permutation correspondant. Nous prenons cette notation pour l'opérateur permutation agissant sur les positions des particules pour ne pas le confondre avec l'opérateur permutation P_{ij} qui agira sur les degrés internes de liberté (les spins) lorsque nous les introduirons. L'idée est de partir d'opérateurs impulsion "couplés" (qui s'apparentent aux opérateurs de Dunkl une fois représentés en terme d'opérateurs différentiels) de la forme

$$\pi_i = p_i + i \sum_{j \neq i} V(x_i - x_j) \mathcal{P}_{ij} \equiv p_i + i \sum_{j \neq i} V_{ij} \mathcal{P}_{ij}. \quad (\text{II.3.1.1})$$

La fonction V est quelconque pour l'instant (mais suffisamment régulière). Une première condition est obtenue en demandant l'hermiticité de π_j

$$V(x)^\dagger = -V(-x). \quad (\text{II.3.1.2})$$

On cherche maintenant à former un Hamiltonien à partir des π_j ayant la forme de l'Hamiltonien libre

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \pi_i^2. \quad (\text{II.3.1.3})$$

Un rapide calcul donne alors

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} (iV_{jk}(p_j + p_k) \mathcal{P}_{jk} + V'_{jk} \mathcal{P}_{jk} + V_{jk}^2) - \frac{1}{6} \sum_{\substack{i \neq j, k \\ j \neq k}} (V_{ij}V_{jk} + V_{ki}V_{ij} + V_{jk}V_{ki}) \mathcal{P}_{ij} \mathcal{P}_{jk}, \quad (\text{II.3.1.4})$$

où $V'_{jk} = i[p_j, V_{jk}]$ (ce sera tout simplement la dérivée de V lorsque nous représenterons). Si on souhaite avoir un Hamiltonien sous la forme habituelle d'un terme cinétique et de termes de potentiels, on cherche à éliminer les termes linéaires en p_j . En outre, inspiré des phénomènes de factorisation et des modèles de gaz imparfaits, on souhaite n'avoir que des potentiels à deux corps. Cela est obtenu si on impose les conditions suivantes sur le potentiel V

$$V(-x) = -V(x), \quad (\text{II.3.1.5})$$

et

$$V_{ij}V_{jk} + V_{ki}V_{ij} + V_{jk}V_{ki} = W_{ij} + W_{jk} + W_{ki}, \quad (\text{II.3.1.6})$$

où $W_{ij} = W(x_i - x_j)$ et $W(x) = W(-x)$. Cette équation fonctionnelle est précisément l'équation qui est apparue dans les travaux de B. Sutherland comme condition de factorisabilité de l'état fondamental [121]. Dans ces travaux, certaines solutions sont envisagées (qui reproduisent les Hamiltoniens qui nous intéressent) mais une solution complète n'est pas donnée. Nous renvoyons à [23] pour l'ensemble des solutions. Etant donnée une telle solution il reste

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i < j} \left(V'_{ij} \mathcal{P}_{ij} + V_{ij}^2 - W_{ij} \sum_{k \neq i, j} \mathcal{P}_{ij} \mathcal{P}_{jk} \right). \quad (\text{II.3.1.7})$$

Il s'agit maintenant d'inclure H dans une hiérarchie construite à partir des π_j . Commençons par calculer le commutateur

$$[\pi_i, \pi_j] = \sum_{k \neq i, j} (V_{ij}V_{jk} + V_{ki}V_{ij} + V_{jk}V_{ki}) [\mathcal{P}_{ij} \mathcal{P}_{jk} - \mathcal{P}_{ji} \mathcal{P}_{ik}]. \quad (\text{II.3.1.8})$$

On voit donc que si on trouve un potentiel V tel que $W = 0$, les π_j commutent et on peut s'en servir pour définir une hiérarchie $H^{(n)}$

$$H^{(n)} = \sum_{j=1}^N \pi_j^n, \quad (\text{II.3.1.9})$$

d'opérateurs indépendants en involution

$$[H^{(p)}, H^{(q)}] = 0, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.3.1.10})$$

En utilisant la représentation standard de x_j et p_j , $j = 1, \dots, N$ sur l'espace de Hilbert des fonctions d'onde de $L^2(\mathbb{R}^N)$, on obtient un Hamiltonien intégrable $H^{(2)}$ et comme les $H^{(p)}$ commutent avec \mathcal{P}_{ij} , on peut en outre se restreindre à des fonctions d'onde bosoniques ou fermioniques, caractérisées comme vecteurs propres de \mathcal{P}_{ij} avec la valeur 1 ou -1 . L'exemple fondamental de cette situation est donné par $V(x) = \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ produisant l'Hamiltonien de type Calogero suivant

$$H_C = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{i < j} \frac{a(a - \varepsilon)}{(x_i - x_j)^2}, \quad (\text{II.3.1.11})$$

avec $\varepsilon = 1$ pour des bosons et $\varepsilon = -1$ pour des fermions. Les Hamiltoniens de type Sutherland sont obtenus pour des solutions V telles que $W(x)$ soit une constante non nulle. Parmi les solutions possibles pour V , il y en a trois qui donnent des modèles très connus

$$V(x) = \begin{cases} a \cot \frac{x}{l} \\ a \coth \frac{x}{l} \\ a \operatorname{sgn} \frac{x}{l} \end{cases} \quad (\text{II.3.1.12})$$

a étant une constante, l étant une échelle de longueur que l'on peut absorber par changement d'unité de longueur (ce qu'on fera dans la suite) et sgn désignant la fonction *signe* construite à partir de la fonction de Heaviside θ comme $\operatorname{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x)$. Le premier potentiel donne le modèle de Sutherland

$$H_S = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{i < j} \frac{a(a - \varepsilon)}{\sin^2(x_i - x_j)} - a^2 \frac{N(N^2 - 1)}{6}, \quad (\text{II.3.1.13})$$

tandis que le second produit la variante hyperbolique où \sin est remplacé par \sinh pour mesurer la distance entre particule. Enfin, la troisième possibilité est une solution singulière. Elle est néanmoins très intéressante puisqu'elle reproduit l'Hamiltonien avec interaction de contact. Pour ces trois modèles, il faut modifier légèrement les π_j pour pouvoir montrer l'intégrabilité. L'idée est de décaler le terme correspondant au potentiel dans π_j en introduisant

$$\tilde{\pi}_j = \pi_j + a \sum_{j \neq i} \mathcal{P}_{ij}, \quad (\text{II.3.1.14})$$

a étant la constante apparaissant dans (II.3.1.12). On définit alors

$$\tilde{H}^{(n)} = \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_j^n, \quad (\text{II.3.1.15})$$

dont on montre qu'ils commutent [105]

$$\left[\tilde{H}^{(p)}, \tilde{H}^{(q)} \right] = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.3.1.16})$$

Remarquons que le modèle de Calogero avec potentiel harmonique en plus de l'interaction en $1/r^2$ peut être traité de la même façon. Pour l'Hamiltonien avec interaction de contact, cette procédure établit l'intégrabilité directement en première quantification, sans passer par la théorie des champs. En outre, elle est à la base de la démonstration de la symétrie yangienne de ce modèle [97].

Les auteurs de [89] ont généralisé cette méthode au cas où les particules possèdent n degrés internes de liberté. En notant P_{ij} l'opérateur échangeant les "spins" des particules i et j , les fonctions d'onde ayant une symétrie définie sont maintenant caractérisées comme étant des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{P}_{ij}P_{ij} = P_{ij}\mathcal{P}_{ij}$. L'espace de Hilbert de représentation est donc $L^2(\mathbb{R}^N) \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$ et le sous-espace de statistique définie est obtenu en quotientant par la relation $\mathcal{P}_{ij}P_{ij} = \pm 1$. Une conséquence importante de cela est que l'on ne peut plus remplacer \mathcal{P}_{ij} par ε lorsque l'on représente l'Hamiltonien obtenu par la construction précédente. Comme on le verra dans la section suivante, il faut faire appel à un projecteur dont le rôle est de "transformer" les opérateurs \mathcal{P}_{ij} en P_{ij} . Physiquement, on obtient donc un Hamiltonien qui, en plus de l'interaction à distance, couple les particules par leur "spin". L'objet de la prochaine section est de montrer que, partant d'une structure algébrique donnée, en l'occurrence $\mathcal{Y}(n)$, on peut construire un Hamiltonien possédant cette algèbre comme symétrie. En particulier, on obtient l'intégrabilité.

II.3.2 De l'algèbre à l'Hamiltonien intégrable

Cette section est basée sur les résultats fondamentaux de [11] mais nous présentons l'approche et le formalisme un peu différemment, dans l'esprit de l'article [III] où un Hamiltonien unifiant l'Hamiltonien de Sutherland, de Sutherland hyperbolique et d'interaction de contact est construit (dans le cas avec bord).

La construction fait appel à deux structures algébriques, le Yangien de $gl(n)$, $\mathcal{Y}(n)$ [40] et l'algèbre de Hecke affine dégénérée $\mathcal{H}(N)$ [41, 86]. Nous avons déjà discuté du Yangien dans la section I.3.1 et nous donnons la définition de $\mathcal{H}(N)$

Définition II.3.2.1 *Etant donné un paramètre $\beta \in \mathbb{C}$, l'algèbre de Hecke affine dégénérée $\mathcal{H}(N)$ d'unité $\mathbf{1}$ est engendrée par les éléments D_1, \dots, D_N*

et Π_1, \dots, Π_{N-1} satisfaisant les relations suivantes

$$\Pi_i \Pi_{i+1} \Pi_i = \Pi_{i+1} \Pi_i \Pi_{i+1}, \quad (\text{II.3.2.17})$$

$$\Pi_i^2 = \mathbf{1}, \quad \Pi_i \Pi_j = \Pi_j \Pi_i, \quad |i - j| > 1 \quad (\text{II.3.2.18})$$

$$\Pi_j D_j = D_{j+1} \Pi_j + \beta \mathbf{1} \quad (\text{II.3.2.19})$$

$$\Pi_j D_k = D_k \Pi_j, \quad k \neq j, j+1 \quad (\text{II.3.2.20})$$

$$D_j D_k = D_k D_j. \quad (\text{II.3.2.21})$$

Nous faisons plusieurs remarques. Tout d'abord, les trois premières relations sont les relations de définition du groupe des permutations \mathfrak{S}_N . Nous verrons d'ailleurs que l'on peut représenter Π_i par l'opérateur $\mathcal{P}_{i,i+1}$ de Polychronakos vu dans la section précédente mais nous insistons cependant sur le fait qu'à ce stade, c'est un générateur d'algèbre abstrait. Dans la suite nous aurons besoin de l'élément suivant, défini pour $i < j$,

$$\Pi_{ij} = \Pi_i \Pi_{i+1} \dots \Pi_{j-1} \Pi_{j-2} \dots \Pi_i. \quad (\text{II.3.2.22})$$

Ensuite, la relation faisant intervenir β est souvent accompagnée dans la littérature d'une autre relation

$$\Pi_j D_{j+1} = D_j \Pi_j - \beta \mathbf{1}. \quad (\text{II.3.2.23})$$

Cependant, en écrivant $D_{j+1} = D_{j+1} \Pi_j^2$, cette dernière est facilement déduite des relations de définition de $\mathcal{H}(N)$. Le paramètre β est souvent pris égal à 1 dans la littérature mathématique mais nous le gardons quelconque ici car il aura un rôle physique. Enfin la dernière relation impose la commutation des générateurs D_j . Nous verrons que ces générateurs seront réalisés par les opérateurs impulsion généralisés de [105]. Ainsi, nous imposons d'emblée la commutation qui était la clé de l'intégrabilité dans l'approche de [105] et donc nous contraignons les potentiels admissibles différemment. Pour la suite, nous ajoutons que les éléments D_i doivent commuter avec P_{ij} (en effet, nous verrons que ces éléments seront représentés par des opérateurs agissant sur des espaces différents). Enfin, nos éléments D_j correspondent (une fois représentés) aux opérateurs \widehat{D}_j utilisés dans [11].

Partant de ces structures algébriques, il y a plusieurs étapes dans la construction de l'Hamiltonien physique ayant le Yangien comme algèbre de symétrie. Comme nous l'avons discuté dans la section I.3.1 de la première partie, l'idée est d'extraire l'Hamiltonien du déterminant quantique du Yangien. Pour cela, nous allons réaliser le Yangien décrit dans le formalisme FRT grâce à $\mathcal{H}(N)$. Le déterminant quantique sera une fonction génératrice d'éléments de $\mathcal{H}(N)$ parmi lesquels on identifiera un opérateur Hamiltonien. En représentant $\mathcal{H}(N)$ sur l'espace de Hilbert des fonctions d'onde, on obtiendra donc un Hamiltonien analogue à ceux de [89]. Il restera alors le point crucial de la projection permettant de "transformer" Π_{ij} agissant sur les positions des particules en P_{ij} agissant sur leurs "spins" et un changement de jauge à effectuer pour obtenir l'Hamiltonien physique intégrable recherché.

Voyons tout cela plus en détail. Partant de

$$R_{00'}(u-v)T_0(u)T_{0'}(v) = T_{0'}(v)T_0(u)R_{00'}(u-v), \quad (\text{II.3.2.24})$$

où R est la matrice R de Yang (I.3.1.7), un résultat important de [11] est que l'on peut réaliser $T(u)$ de la façon suivante

$$T_0(u) = L_{01}(u) \dots L_{0N}(u), \quad (\text{II.3.2.25})$$

avec, pour $i = 1, \dots, N$

$$L_{0i}(u) = \frac{u + D_i}{u + D_i - \kappa} R_{0i}(u + D_i). \quad (\text{II.3.2.26})$$

La terminologie usuelle convient d'appeler l'espace 0 espace auxiliaire tandis que les espaces 1 à N sont les *espaces quantiques* correspondant aux particules et sur lesquels P_{ij} agit. Pour n degrés de libertés, ces espaces sont isomorphes à \mathbb{C}^n . La preuve que la relation (II.3.2.24) est vraie pour cette réalisation est bien connue de la méthode de diffusion inverse quantique appliquée aux chaînes de spins. Partant de l'équation de Yang-Baxter vérifiée par R

$$R_{00'}(u-v)R_{0i}(u)R_{0'i}(v) = R_{0'i}(v)R_{0i}(u)R_{00'}(u-v), \quad (\text{II.3.2.27})$$

pour $i = 1, \dots, N$, on peut décaler les paramètres spectraux $u \rightarrow u + D_i$ et $v \rightarrow v + D_i$ car les D_i commutent et apparaissent comme des scalaires pour la matrice R . En outre, comme les D_i commutent avec P_{ij} , on obtient facilement

$$R_{00'}(u-v)L_{0i}(u)L_{0'i}(v) = L_{0'i}(v)L_{0i}(u)R_{00'}(u-v), \quad (\text{II.3.2.28})$$

pour $i = 1, \dots, N$. On en déduit alors (II.3.2.24) en remarquant que $L_{0i}(u)$ commute avec $L_{0'j}(v)$ pour $i \neq j$. Nous venons donc de montrer que dans la réalisation (II.3.2.25), $T(u)$ contient les générateurs de $\mathcal{Y}(n)$. Passons au calcul du déterminant quantique maintenant. On peut montrer que, dans la réalisation (II.3.2.25), il prend la forme simple suivante

$$\text{qdet } T(u) = \prod_{j=1}^N \frac{u + D_j}{u + D_j - n\kappa + \kappa}. \quad (\text{II.3.2.29})$$

On sait alors que les éléments apparaissant comme les coefficients du déterminant quantique développé en puissance de u^{-1} sont en involution et commutent avec toute l'algèbre. En faisant un développement jusqu'à l'ordre u^{-3} on identifie

$$I = \sum_{j=1}^N D_j \quad \text{et} \quad H = \sum_{j=1}^N D_j^2. \quad (\text{II.3.2.30})$$

En poussant le développement plus loin, on peut exhiber une hiérarchie d'éléments en involution "à la Polychronakos" basé sur les éléments D_j . Remarquons toutefois deux choses : nous n'avons encore rien spécifié quant à la nature des D_j qui sont toujours des éléments algébriques à ce stade et en plus de l'intégrabilité, nous avons ici l'algèbre de symétrie, $\mathcal{Y}(n)$. En vue des applications physiques, nous avons besoin d'introduire un projecteur qui nous permettra de nous restreindre à une statistique donnée en présence de degrés internes pour les particules lorsque nous représenterons H ci-dessus comme un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^N) \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$. Soit $\varepsilon = \pm 1$ et Λ_ε défini par

$$\Lambda_\varepsilon = \frac{1}{N!} \prod_{j=2}^N (1 + \varepsilon P_{1j} \Pi_{1j} + \dots + \varepsilon P_{j-1,j} \Pi_{j-1,j}) . \quad (\text{II.3.2.31})$$

On peut alors montrer le *théorème* Λ suivant

Théorème II.3.2.2 *Pour $\beta = \varepsilon \kappa$, $T(u) \Lambda_\varepsilon$ est aussi une réalisation de $\mathcal{Y}(n)$ i.e.*

$$R_{00'}(u-v) T_0(u) \Lambda_\varepsilon T_{0'}(v) \Lambda_\varepsilon = T_{0'}(v) \Lambda_\varepsilon T_0(u) \Lambda_\varepsilon R_{00'}(u-v) . \quad (\text{II.3.2.32})$$

En outre, le déterminant quantique de $T(u) \Lambda_\varepsilon$ est donnée par

$$qdet (T(u) \Lambda_\varepsilon) = (qdet T(u)) \Lambda_\varepsilon . \quad (\text{II.3.2.33})$$

Le problème du projecteur est toujours (à ma connaissance) abordé pour une représentation donnée de l'algèbre $\mathcal{H}(N)$ dans la littérature (lorsqu'il est abordé) mais nous insistons sur le fait que le théorème Λ ne s'appuie que sur les relations de définition de l'algèbre $\mathcal{H}(N)$. Ce résultat a été obtenu sous cette forme pendant ma thèse dans l'article [III]. Ainsi, une fois démontré, il est valable quelle que soit la représentation choisie pour $\mathcal{H}(N)$. A ce propos, nous représentons les différents objets introduits sur l'espace des fonctions d'onde $\psi(x_1, \dots, x_N | s_1, \dots, s_N) \equiv \psi(\mathbf{x} | \mathbf{s}) \in L^2(\mathbb{R}^N) \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$ de la façon suivante

$$\Pi_{ij} \psi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots | \mathbf{s}) = \psi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots | \mathbf{s}) , \quad (\text{II.3.2.34})$$

$$P_{ij} \psi(\mathbf{x} | \dots, s_i, \dots, s_j, \dots) = \psi(\mathbf{x} | \dots, s_j, \dots, s_i, \dots) , \quad (\text{II.3.2.35})$$

et pour D_j , inspiré des opérateurs impulsion généralisés de [105], nous utilisons des opérateurs de Dunkl [42] sous la forme

$$D_j = a(x_j) \partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{j-1} V(x_j, x_k) \Pi_{jk} - \sum_{k=j+1}^N V(x_k, x_j) \Pi_{kj} , \quad (\text{II.3.2.36})$$

a et V étant des fonctions que l'on peut déterminer en résolvant les contraintes imposées par les relations de définition de $\mathcal{H}(N)$. On trouve

$$V(x, y) = \frac{\beta}{e^{-2\gamma(A(x)-A(y))} - 1} , \quad \gamma \in \mathbb{C} , \quad A(x) = \int^x \frac{dy}{a(y)} \quad (\text{II.3.2.37})$$

En se restreignant alors à l'espace de Hilbert obtenu à partir de l'espace de Hilbert total en quotientant par la relation $\Lambda_\varepsilon - 1 = 0$ ($\varepsilon = 1$ correspondant à des bosons et $\varepsilon = -1$ à des fermions), le théorème Λ nous permet de déduire que l'Hamiltonien suivant admet le Yangien $\mathcal{Y}(n)$ comme algèbre de symétrie (en particulier, il est intégrable) [III]

$$H_\Lambda = \sum_{i=1}^N (a(x_i)^2 \partial_{x_i}^2 + a(x_i) a'(x_i) \partial_{x_i}) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\frac{\gamma \kappa \left(P_{ij} - \frac{\kappa}{2\gamma} \right)}{\sinh^2 [\gamma (A(x_i) - A(x_j))]} \right). \quad (\text{II.3.2.38})$$

Tout comme dans la discussion de [105], on voit que cet Hamiltonien possède un terme linéaire en ∂_{x_i} qui n'est pas désiré ainsi qu'un terme cinétique faisant intervenir a . Il est possible en toute généralité de faire un changement de jauge dépendant de la fonction a qui permet d'obtenir le terme cinétique usuel et de supprimer la terme linéaire (voir par exemple l'article [III]). Pour ce qui nous intéresse, il suffit en fait de prendre $a = 1$ et l'Hamiltonien général ci-dessus reproduit des généralisations à degrés internes de liberté d'Hamiltoniens intégrables bien connus : Schrödinger non-linéaire, Sutherland et Sutherland hyperbolique, pour lesquels la symétrie yangienne avait été prouvée indépendamment [97, 89, 49]. Pour cela on utilise le paramètre libre γ et on interprète κ comme une constante de couplage [III].

Pour conclure cette partie sur les méthodes de résolution des systèmes intégrables, nous précisons qu'une telle construction est très intéressante en soi (car elle permet de découvrir de nouveaux systèmes intégrables) mais aussi que la connaissance de l'algèbre de symétrie se révèle très utile pour la résolution du système correspondant. Nous citons l'exemple des travaux de K. Takemura et D. Uglov portant sur la construction d'une base des états propres pour les modèles de Calogero-Sutherland avec spin grâce à des représentations irréductibles du Yangien [122, 123].

Troisième partie

Contributions du travail de thèse

Préambule

A la lumière des deux parties précédentes dont le but était de recadrer le contexte de mon travail, je vais présenter maintenant les résultats originaux obtenus au cours de ma thèse. Toutes les notions, motivations et techniques requises pour appréhender ces résultats ont été introduites (et un minimum discutées) dans ce qui précède. C'est pourquoi nous renvoyons le lecteur non-spécialiste ou simplement intéressé aux passages correspondants aux divers travaux qui suivent. Plus précisément, mes travaux constituant à l'heure actuelle huit articles ont été regroupés par thème (plutôt que par ordre chronologique) en quatre groupes de tailles différentes. Le fil conducteur entre ces différents groupes est le système correspondant à l'Hamiltonien de l'équation de Schrödinger non-linéaire sous toutes ses formes : théorie classique des champs, théorie quantique des champs et problème à N corps en mécanique quantique. Motivé par le rôle fondamental de ce système en physique mathématique, physique théorique et physique de la matière condensée (dont nous avons déjà discuté dans l'introduction), ce modèle se retrouve invariablement dans mes travaux : comme point de départ pour étendre les résultats d'intégrabilité à plusieurs situations (présence de bosons et de fermions, inclusion d'une impureté), comme "produit" d'une étude renversant l'approche usuelle et enfin comme modèle permettant de faire des prédictions en matière condensée pour un gaz quantique en présence d'impureté.

Le premier groupe concerne une extension de tous les résultats d'intégrabilité et de symétrie connus pour l'équation de Schrödinger classique et quantique au cas où l'on considère dans un formalisme unifié des bosons et des fermions simultanément. Les deux premiers chapitres de la deuxième partie servent donc de base pour ce groupe ainsi que le troisième chapitre de la première partie. Le deuxième groupe concerne l'utilisation de la méthode décrite dans le troisième chapitre de la deuxième partie pour construire un Hamiltonien général intégrable ayant l'algèbre de réflexion comme algèbre de symétrie. Le troisième groupe, le plus important en taille, concerne la notion d'impureté dans les systèmes intégrables et le phénomène de factorisation en présence d'une impureté. Le deuxième chapitre de la première partie et celui de la deuxième partie sont fondamentaux pour ce groupe. Enfin, le quatrième groupe, tout en étant dans la continuité des travaux antérieurs (les études menées furent inspirées des résultats du deuxième et du troisième groupe), se veut un premier pas vers des applications potentielles des systèmes intégrables en physique de la matière condensée (gaz quantiques ultra-froids,

condensation de Bose-Einstein, solitons). Le premier chapitre de la première partie aidera le lecteur à comprendre mon point de vue. Bien évidemment, il reste beaucoup à faire et à comprendre, notamment pour les deux derniers groupes de travaux qui sont à la base des projets que j'ai pour les années à venir.

J'aimerais enfin terminer ce préambule en précisant l'optique choisie pour cette troisième partie. Il ne s'agit nullement de traduire, détailler ou répéter les calculs et les résultats obtenus pendant ma thèse et présentés dans les articles [I] à [VIII] qui sont joints dans le deuxième chapitre. Je voudrais simplement exposer les motivations originelles et ce qui est nouveau en le mettant en relief par rapport aux deux premières parties. Une légère exception sera faite pour le troisième groupe où la discussion promise au début de la sous-section I.2.4.2 sera présentée. Le premier chapitre de cette troisième partie comporte quatre sections (une pour chaque groupe) et rassemble les résultats de mes travaux de recherche tandis que le deuxième chapitre est constitué des articles originaux contenant les détails des résultats.

Chapitre 1

Travaux de thèse et discussions

III.1.1 L'équation de super-Schrödinger non-linéaire

Comme nous l'avons vu, l'équation de Schrödinger non-linéaire fait partie des modèles incontournables dans le domaine des systèmes intégrables et a permis d'établir des méthodes puissantes de résolution algébrique. La généralisation à n degrés de liberté pour des bosons ou des fermions a permis d'identifier une symétrie étendue (pour le système sur la ligne) donnée par l'algèbre $\mathcal{Y}(n)$ (cf section I.3.1) [93]. A ce stade, inspiré par la supersymétrie, il semble naturel de chercher une version décrivant des degrés internes bosoniques et fermioniques dans un formalisme unifié. C'est avec ce projet que mon directeur de thèse, Éric Ragoucy, m'a permis de me familiariser avec le domaine des systèmes intégrables tout en arrivant à des résultats originaux. Pour toutes les raisons que j'ai déjà données, ce fut très instructif pour moi car le modèle de Schrödinger non-linéaire est un excellent support pour appréhender les concepts fondamentaux des systèmes intégrables (cela transparaît d'ailleurs dans tout ce manuscrit).

Originellement, des approches utilisant les super-champs propres au formalisme supersymétrique ont été envisagées mais il est apparu que la question de l'intégrabilité n'était pas facilement traitable, suscitant plusieurs travaux avec des résultats différents (voir par exemple [21, 106] et leurs références). En outre, les résultats obtenus sont essentiellement classiques. Une autre approche, semblable à celle que nous avons choisie, fut introduite par P.P. Kulish [77]. Il s'agissait de considérer les champs à valeurs matricielles avec un formalisme gradué (cf section I.3.2.2). Le modèle est considéré au niveau quantique mais uniquement du point de vue de l'ansatz de Bethe algébrique (c'est-à-dire essentiellement la partie directe de la méthode de diffusion inverse). En particulier, la partie inverse du problème n'est pas étudiée. En outre, l'étude est menée sur un intervalle fini et la question de la symétrie ainsi que la forme explicite du champ canonique ne sont pas envisagées.

L'idée des articles [I] et [II] est de fournir une étude complète en partant

d'un formalisme gradué pour coder un "super-champ" à valeurs vectorielles possédant m degrés bosoniques et n degrés fermioniques. En utilisant la notion d'espaces auxiliaires, *le résultat fondamental de ces articles est que tous les résultats d'intégrabilité et de symétrie connus pour l'équation de Schrödinger non-linéaire dans le contexte de la méthode de diffusion inverse peuvent être transposés au cas "super" et ce, tant au niveau classique que quantique.* En fait, il est possible de reproduire tous les résultats qui composent les deux premiers chapitres de la deuxième partie. Comme nous ne partons pas du formalisme habituel en supersymétrie, il convient cependant de préciser ce qu'on entend par ce terme. C'est ce que nous faisons dans l'article [I] où des générateurs fermioniques sont construits explicitement (au niveau classique) en termes des champs canoniques. Ces générateurs forment, avec les générateurs bosoniques usuels de la hiérarchie (N, P, H) une super-algèbre qui est symétrie du modèle : leurs crochets de Poisson avec l'Hamiltonien sont nuls. Cette super-algèbre est une réalisation du super-Yangien en terme du super-champ et nous l'utilisons pour définir la notion de supersymétrie applicable à notre modèle.

Nous résumons maintenant les différentes étapes du reste de la construction. Partant de la paire de Lax graduée (classique), on construit la matrice de transition et la matrice de monodromie pour laquelle on obtient les crochets de Poisson des éléments. A ce stade, on identifie une structure de super-Yangien classique, définie à partir d'une matrice r classique gradué à la façon de [7], et qui est la symétrie de l'Hamiltonien intégrable donnant l'évolution du super-champ. Considérant le problème inverse, nous montrons qu'il est possible d'obtenir une solution explicite "à la Rosales" (cf sous-section II.1.2.2) basée sur des coefficients de réflexion gradués (qui sont eux aussi des vecteurs de taille $m + n$ possédant m degrés bosoniques et n degrés fermioniques). Enfin, nous suivons la méthode de quantification de Sklyanin [119] (guidés par les précisions de [62]) pour transposer toute la méthode au niveau quantique. En particulier, le système quantique intégrable admet le super-Yangien (cf sous-section I.3.2.2) comme algèbre de symétrie. Une version graduée de l'algèbre ZF est obtenue et elle permet de résoudre le problème inverse quantique. Enfin, la notion d'opérateurs bien élevés (cf sous-section I.2.2.3) est utilisée explicitement pour la première fois, afin de réaliser les générateurs du super-Yangien en termes des générateurs de l'algèbre ZF graduée. Nous n'entrerons pas plus dans les détails, renvoyant le lecteur aux articles [I] et [II] du chapitre suivant où tous les résultats décrits ci-dessus sont exposés explicitement.

III.1.2 Hamiltoniens intégrables avec bord

A l'origine, ce projet, que j'ai réalisé avec un autre doctorant, Nicolas Crampé, était basé sur l'affirmation dans la littérature que la symétrie du modèle de Sutherland avec spins en présence d'un bord est donnée par le

Yangien. Inspirés par la méthode de [11] détaillée dans la section II.3.2, nous avons voulu identifier le Yangien en question.

Finalement, *la conclusion est que cette affirmation est fausse et nous avons identifié l'algèbre de symétrie correcte : l'algèbre de réflexion* (cf la sous-section I.3.2.1). En fait, en suivant la procédure de la section II.3.2, *nous avons construit un Hamiltonien général à partir de l'algèbre de réflexion*. La réalisation de l'algèbre de réflexion se fait grâce à l'homomorphisme π défini dans la sous-section I.3.2.1 et à une algèbre de Hecke affine dégénérée *étendue*, dont la définition est donnée dans l'article [III], et qui fait intervenir des générateurs Q_j , $j = 1, \dots, N$ en plus des générateurs D_j et P_j de l'algèbre de Hecke affine dégénérée. L'étape importante du théorème Λ est alors établie pour un projecteur total tenant compte des générateurs supplémentaires de

l'algèbre de Hecke affine dégénérée étendue. L'extraction de l'élément $\sum_{j=1}^N D_j^2$ qui donne l'Hamiltonien intégrable se fait à partir du déterminant de Sklyanin (cf sous-section I.3.2.1). On l'identifie en faisant un développement jusqu'à l'ordre u^{-3} (cf section II.3.2). Un point important à noter est que l'élément I de (II.3.2.30) n'apparaît pas dans ce développement et cela est interprété plus tard dans l'article comme le signe de la brisure de l'invariance par translation due à la présence du bord. En effet, on peut montrer que, une fois représenté, l'élément I correspond à l'impulsion totale du système (voir l'article [III]). A ce sujet, la représentation des générateurs D_j fait appel à des opérateurs de Dunkl adaptés à la présence des Q_j . Les relations de définition de l'algèbre de Hecke affine dégénérée étendue permettent de trouver les potentiels admissibles et donc la forme de l'Hamiltonien. En utilisant le théorème Λ et un changement de jauge approprié, *la conclusion principale de l'article [III] est que l'Hamiltonien général suivant*

$$H_G = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\frac{\gamma \kappa \left(P_{ij} - \frac{\kappa}{2\gamma} \right)}{\sin^2 [\gamma(x_i - x_j)]} + \frac{\gamma \kappa \left(Q_i Q_j P_{ij} - \frac{\kappa}{2\gamma} \right)}{\sin^2 [\gamma(x_i + x_j)]} \right) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\gamma(b+c) \left(Q_i + \frac{b+c}{2\gamma} \right)}{2 \sin^2 (\gamma x_i)} + \frac{\gamma(b-c) \left(Q_i + \frac{b-c}{2\gamma} \right)}{2 \cos^2 (\gamma x_i)} \right),$$

possède l'algèbre de réflexion comme symétrie et est intégrable. Dans H_G , les paramètres $\gamma, b, c \in \mathbb{C}$ sont libres, P_{ij} est la permutation agissant sur les spins des fonctions d'onde et Q_j est une transformation agissant sur le spin de la particule j telle que $Q_j^2 = \mathbb{I}$. En faisant des choix particuliers de ces paramètres, nous retrouvons l'Hamiltonien de Sutherland (trigonométrique et hyperbolique) avec spins en présence d'un bord, ce qui montre que son algèbre de symétrie est l'algèbre de réflexion et pas un Yangien. Et pour un autre choix, on retrouve l'Hamiltonien avec interaction de contact en présence d'un bord discuté pour la première fois par M. Gaudin [55]. Ainsi, nous avons identifié l'algèbre de symétrie de ce modèle (en première quantifi-

cation), confirmant un résultat que l'on peut facilement obtenir des travaux de M. Mintchev *et al.* [53] en seconde quantification et par une méthode complètement différente.

III.1.3 Intégrabilité et factorisation en présence d'une impureté

III.1.3.1 Discussion générale

Avant de revenir sur les motivations physiques et l'origine de l'algèbre RT comme promis à la sous-section I.2.4.2, nous récapitulons les grandes lignes des résultats correspondants aux articles [IV] à [VII]. Les articles [IV] et [V] justifient explicitement l'intérêt de l'algèbre RT comme analogue de l'algèbre ZF dans les systèmes intégrables incluant une impureté. L'impureté considérée est reliée au problème des extensions auto-adjointes de $(-\frac{d^2}{dx^2}, C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ discuté dans la section I.1.2. On l'imagine donc comme un point de la ligne où le champ et/ou sa dérivée première subissent une discontinuité, ce qui est la définition généralement adoptée dans les problèmes avec défauts (voir par exemple [17, 18]).

Le système choisi pour appliquer l'algèbre RT est l'équation de Schrödinger non-linéaire (quantique) qui est un système intégrable avec interaction. De façon générale, une formulation en paire de Lax pour un problème avec impureté (ou défaut) n'est pas connue (sauf pour le modèle *classique* de Toda affine [17, 18]) et on ne peut pas reproduire la partie directe de la méthode inverse de diffusion en présence d'une impureté. Cependant, on sait que l'algèbre ZF représente la charnière entre partie directe et partie inverse (au niveau quantique) pour l'équation de Schrödinger non-linéaire sur la ligne. L'idée est donc de substituer l'algèbre RT à l'algèbre ZF pour résoudre la partie inverse quantique en présence d'une impureté. Les articles [IV] et [V] contiennent les résultats de cette approche : il est possible de reproduire tous les résultats de la sous-section II.2.1.2 en présence d'une impureté grâce à l'algèbre RT. Notons cependant que la symétrie n'est plus donnée par le Yangien $\mathcal{Y}(n)$ dans ce cas mais par l'algèbre d'impureté (I.2.4.118-I.2.4.121). Cela fait l'objet de l'étude de l'article [VI] dans lequel nous mettons en évidence un phénomène de brisure spontanée de symétrie grâce aux représentations de Fock de l'algèbre RT appropriée. En classant les solutions des équations de réflexion-transmission correspondantes, nous discutons en outre la possibilité de généraliser le type d'impureté dans l'équation de Schrödinger non-linéaire (à n degrés internes de liberté) à des impuretés couplant les degrés internes de liberté et donnons les conditions aux limites correspondantes pour le champ.

Nous terminons cette discussion générale sur le fait que cet exemple ne peut pas être traité par l'approche DMS. D'une part, au niveau algébrique, l'algèbre de défaut (cf la sous-section I.2.4.1) ne permet pas de reconstruire

le champ quantique. D'autre part, nous savons que les équations de l'approche DMS ne peuvent pas rendre compte d'un système intégrable avec interaction en présence d'une impureté qui réfléchit et transmet. Cela se retrouve dans le fait que les données de diffusion de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec impureté (*i.e.* la matrice de diffusion et les matrices de réflexion et de transmission) ne sont pas solutions des équations de réflexion-transmission de l'approche DMS. En revanche, elles sont solutions des équations de réflexion-transmission de l'approche RT. Cela nous conduit tout naturellement à l'étude menée dans l'article [VII] où nous avons voulu comprendre tout cela plus en profondeur. Comme les résultats de ce travail sont à la base du point de vue plus physique sur l'origine de l'algèbre RT et sont fondamentaux pour comprendre la relation entre les deux approches au centre d'un débat dans la communauté, nous les présentons en détail dans la sous-section suivante.

III.1.3.2 Factorisation en présence de réflexion et transmission

Rappelons que le point de départ est de trouver les équations contraignant les données physiques de diffusion en présence de réflexion et de transmission, tout comme l'équation de réflexion établie par I. Cherednik [28] vient compléter l'équation de Yang-Baxter pour une théorie factorisable en présence d'un bord. Avec le succès de l'algèbre ZF et l'impossibilité de discerner entre l'opérateur de bord (sous-section I.2.3.1) et l'algèbre de bord (sous-section I.2.3.2) au niveau des équations physiques, la tentation était grande de généraliser d'abord chaque approche au niveau algébrique. Cela a abouti à l'algèbre de défaut de l'approche DMS et à l'algèbre RT. Cependant, comme nous l'avons vu, ces deux approches ne conduisent pas aux mêmes équations de factorisation pour les quantités physiques.

Un premier élément de réponse est obtenu par le constat suivant qui découle des résultats de l'article [VII] : on peut réécrire toutes les équations de l'approche DMS sous la forme des équations de l'approche RT (la réciproque n'étant pas vraie). Pour voir cela, définissons les matrices suivantes

$$\mathcal{R}(k) = \begin{pmatrix} R(-k) & 0 \\ 0 & \tilde{R}(-k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{T}(k) \\ T(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.1.3.1})$$

R, \tilde{R}, T et \tilde{T} étant les matrices de (I.2.4.94, I.2.4.95). Les relations d'unitarité (I.2.4.96) et celles obtenues par $R \leftrightarrow \tilde{R}, T \leftrightarrow \tilde{T}$ peuvent alors être écrites comme

$$\mathcal{R}(k)\mathcal{R}(-k) + \mathcal{T}(k)\mathcal{T}(k) = \mathbb{I}, \quad \mathcal{R}(k)\mathcal{T}(-k) + \mathcal{T}(k)\mathcal{R}(k) = 0. \quad (\text{III.1.3.2})$$

On reconnaît les équations d'unitarité (I.2.4.129) traduisant la conservation de la probabilité de présence pour une impureté non-dissipative. De la même façon, toutes les équations (I.2.4.101-I.2.4.110) peuvent être écrites sous la

forme des équations de réflexion-transmission de l'approche RT (I.2.4.126-I.2.4.128) en introduisant la matrice de diffusion \mathcal{S} (agissant sur $(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \otimes (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$) définie par

$$\mathcal{S}_{AB}(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{21}(k_2, k_1) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.1.3.3})$$

Ici, l'espace auxiliaire sous-jacent (A ou B) est $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$. En particulier, tout cela est encore vrai pour le choix particulier $\mathbf{S}_{12}(k_1, k_2) = \mathbf{S}_{12}(k_1 - k_2)$ correspondant aux équations de réflexion-transmission de l'approche DMS. Ainsi, l'ensemble des équations (I.2.4.101-I.2.4.110) se réduit à trois équations que nous rappelons ici (avec les espaces auxiliaires A et B)

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{AB}(k_1, k_2) \mathcal{R}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(k_2, -k_1) \mathcal{R}_B(k_2) \\ &= \mathcal{R}_B(k_2) \mathbf{S}_{AB}(k_1, -k_2) \mathcal{R}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(-k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.4})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{AB}(k_1, k_2) \mathcal{R}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(k_2, -k_1) \mathcal{T}_B(k_2) \\ &= \mathcal{T}_B(k_2) \mathbf{S}_{AB}(k_1, k_2) \mathcal{R}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.5})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{AB}(k_1, k_2) \mathcal{T}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(k_2, k_1) \mathcal{T}_B(k_2) \\ &= \mathcal{T}_B(k_2) \mathbf{S}_{AB}(k_1, k_2) \mathcal{T}_A(k_1) \mathbf{S}_{BA}(k_2, k_1), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.6})$$

La première équation n'est autre que l'équation de réflexion pour la matrice \mathcal{R} . Les autres équations faisant intervenir réflexion et transmission ont une structure fondamentalement différente de leurs analogues de l'approche DMS. On voit alors qu'en prenant des matrices \mathcal{S} plus générales, ces équations décrivent des situations qui ne peuvent pas être prises en compte par l'approche DMS. C'est précisément le cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire (voir l'article [VII]).

A ce stade, il est déjà satisfaisant de voir que les deux approches ne produisent pas des équations contradictoires mais que l'une est en fait plus générale que l'autre. Insistons sur le fait que cette remarque semble triviale vu ce qui précède mais elle était un des points au coeur de la controverse.

Nous voulons maintenant aller un peu plus loin dans la compréhension car pour l'instant nous avons toujours deux jeux d'équations et, malgré ce que nous venons de voir, la réécriture des "équations DMS" en "équations RT" ne pourrait être qu'un artifice mathématique. Une réponse immédiate est que le modèle physique de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec impureté ne peut être décrit que par les équations RT. En outre, nous répétons un argument proposé à l'origine dans [92] et développé dans l'article [VII].

D'un point de vue physique, un point de départ naturel est l'équation de réflexion (toutes les approches s'accordent sur ce point) et il s'agit maintenant de traduire la possibilité qu'il y ait aussi transmission. Si on imagine

un défaut non dissipatif, un raisonnement standard de mécanique quantique indique que la probabilité de réflexion ou de transmission d'une particule au niveau de l'impureté doit être 1. Dans notre cas où les amplitudes correspondantes sont des matrices, cela se traduit précisément par les relations d'unitarité (I.2.4.129). En résumé, étant données une matrice de diffusion à deux particules \mathcal{S} , une matrice de réflexion \mathcal{R} et une matrice de transmission \mathcal{T} dont on ne suppose rien a priori, un point de départ naturel pour une théorie factorisable en présence d'une impureté est l'ensemble d'équations

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1) \mathcal{R}_2(k_2) \\ &= \mathcal{R}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, -k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(-k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.7})$$

$$\mathcal{R}(k) \mathcal{R}(-k) + \mathcal{T}(k) \mathcal{T}(k) = \mathbb{I} \quad , \quad \mathcal{R}(k) \mathcal{T}(-k) + \mathcal{T}(k) \mathcal{R}(k) = 0, \quad (\text{III.1.3.8})$$

auxquelles on ajoute bien sûr l'équation de Yang-Baxter et les différentes propriétés d'analyticité. Notons ici que les espaces auxiliaires 1 et 2 sont tout à fait généraux et peuvent aussi bien correspondre aux espaces 1 et 2 rencontrés jusqu'à présent (*i.e.* \mathbb{C}^n) ou aux espaces A et B introduits précédemment. On peut alors montrer que la matrice de transmission définie comme la racine carrée positive de la matrice $\mathbb{I} - \mathcal{R}(k) \mathcal{R}(-k)$ vérifie

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1) \mathcal{T}_2(k_2) \\ &= \mathcal{T}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{R}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, -k_1), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.9})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{T}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1) \mathcal{T}_2(k_2) \\ &= \mathcal{T}_2(k_2) \mathcal{S}_{12}(k_1, k_2) \mathcal{T}_1(k_1) \mathcal{S}_{21}(k_2, k_1). \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.10})$$

Ce sont précisément les équations qui apparaissent dans l'approche RT. Cette conclusion importante de l'article [VII] est accompagnée d'un contre-exemple répondant à un autre problème souvent soulevé : c'est la dépendance de la matrice de diffusion en $k_1 - k_2$ plutôt que k_1, k_2 qui implique les résultats de [24]. Dans l'article [VII], nous exhibons une matrice de diffusion non triviale dépendant de $k_1 - k_2$ pour laquelle nous obtenons des solutions non triviales en \mathcal{R} et \mathcal{T} aux équations de réflexion-transmission de l'approche RT.

III.1.4 Impureté dans le problème à N corps en interaction de contact

Ce projet se voulait à la base la continuation des travaux sur la construction d'un Hamiltonien intégrable à partir de l'algèbre de réflexion. Disposant d'une nouvelle algèbre, l'algèbre d'impureté, dont on savait qu'elle était symétrie d'un problème avec impureté d'après les travaux de la section précédente, l'idée était de généraliser encore une fois la méthode de [11] à ce nouveau contexte. Nous étions convaincus que ça devait marcher, au moins pour l'Hamiltonien avec interaction de contact dans lequel nous mettions une impureté, car il correspond à l'équation de Schrödinger non-linéaire avec

impureté. Entre-temps, j'ai participé à une école prédoctorale sur le thème "Refroidissement laser et applications" aux Houches en vue de mon projet d'appliquer certains résultats de mes travaux à la physique de la matière condensée. Pendant cette école, j'ai réalisé l'importance du modèle avec interaction de contact résolu par E. Lieb et W. Liniger dans [82] par ansatz de Bethe (cf section I.1.3) et surtout des équations de Bethe correspondantes dans le domaine des atomes froids et de l'étude de la condensation de Bose-Einstein dans les gaz quantiques. Le rôle important des impuretés dans ce domaine est en outre bien connu. En revenant de l'école et après discussion avec Nicolas, nous avons décidé de changer un peu notre approche : nous allons uniquement considérer le modèle à N corps en interaction de contact dans lequel nous rajoutons une impureté du même type que celle incluse dans l'équation de Schrödinger non-linéaire.

Partant de ce modèle, nous avons montré qu'il est exactement résoluble en utilisant l'ansatz de Bethe. Comme on peut s'y attendre d'après les résultats déjà exposés dans ce manuscrit, la présence de l'impureté fait que le groupe sous-jacent agissant sur les particules n'est plus le groupe des permutations \mathfrak{S}_N mais le groupe de Weyl de l'algèbre de Lie B_N , \mathfrak{W}_N . Cette situation est réminiscente de ce que nous avons présenté pour la construction des représentations de Fock de l'algèbre RT. Ainsi, l'équation de Yang-Baxter, qui assurait la cohérence de la construction des fonctions d'onde par ansatz de Bethe, est maintenant accompagné d'une équation de réflexion généralisée (en un sens détaillé dans l'article [VIII]) qui peut être vue comme un cas particulier des équations de réflexion-transmission de l'approche RT. Disposant de cet ensemble de fonctions d'onde propres, on peut alors imposer différentes conditions aux limites pour le gaz de particules et obtenir les équations de Bethe en présence d'impureté. En particulier, ces équations contrôlent le spectre d'énergie. N'ayant pas encore étudié la limite thermodynamique, nous avons néanmoins utilisé ces équations pour un très petit nombre de particules afin d'obtenir de précieuses informations sur le comportement du spectre d'énergie et sur la densité en présence d'une impureté.

Nous formulons deux points importants pour cette étude. Premièrement, nous avons obtenu les équations de Bethe avec impureté pour un système avec interaction non trivial pour la première fois. Comme nous l'avons déjà remarqué, une formulation en paire de Lax quantique pour un problème avec impureté n'est pas connue. On ne sait donc pas pour l'instant comment mettre en place l'ansatz de Bethe algébrique permettant de construire les états propres de Bethe et de reproduire les équations de Bethe avec impureté. Dans ce contexte, les équations obtenues par une autre méthode (l'ansatz de Bethe en coordonnées) peuvent servir de guide et, de façon plus générale, l'utilisation des résultats de la section précédente pour l'équation de Schrödinger non-linéaire et une meilleure compréhension de l'algèbre d'impureté et des équations de réflexion-transmission RT devraient ouvrir la voie à une généralisation de l'ansatz de Bethe algébrique.

Deuxièmement, l'impureté que nous avons considérée possède quatre pa-

ramètres libres, ce qui permet d'étudier l'influence de la variation de ces paramètres sur le spectre d'énergie et sur les profils de densité. Dans la limite thermodynamique, il sera possible d'étudier cette influence sur les quantités thermodynamiques du gaz quantique ainsi modélisé. C'est en cela que ce travail représente véritablement un premier pas vers un autre domaine très actif : la physique de la matière condensée.

Chapitre 2

Publications des travaux de thèse

Dans ce deuxième chapitre, nous rassemblons les articles [I] à [VIII] qui font partie intégrante de ce manuscrit, afin que le lecteur puisse s'y référer à tout moment lors de la lecture du chapitre précédent. Ils sont classés par ordre chronologique et présentés sous leur forme "officielle" c'est-à-dire la forme de l'éditeur pour ceux qui sont publiés et la forme des archives sinon. Nous rappelons leurs références :

- [I] V. Caudrelier, É. Ragoucy, *Quantum resolution of the nonlinear super-Schrödinger equation*, Int. J. Mod. Phys. **A19** (2004), 1559 et `math-ph/0306010`.
- [II] V. Caudrelier, É. Ragoucy, *Lax pair and super-Yangian symmetry of the non-linear super-Schrödinger*, J. Math. Phys. **44** (2003), 5706 et `math.QA/0306115`.
- [III] V. Caudrelier, N. Crampé, *Integrable N-particle Hamiltonians with Yangian or Reflection Algebra Symmetry*, J. Phys. **A37** (2004), 6285 et `math-ph/0310028`.
- [IV] V. Caudrelier, M. Mintchev, É. Ragoucy, *The quantum non-linear Schrödinger model with point-like defect*, J. Phys. **A37** (2004), L367 et `hep-th/0404144`.
- [V] V. Caudrelier, M. Mintchev, É. Ragoucy, *Solving the quantum non-linear Schrödinger equation with delta-type impurity*, J. Math. Phys. **46** (2005), 42703 et `math-ph/0404047`.
- [VI] V. Caudrelier, É. Ragoucy, *Spontaneous symmetry breaking in the non-linear Schrödinger hierarchy with defect*, J. Phys. **A38** (2005), 2241 et `math-ph/0411022`.
- [VII] V. Caudrelier, M. Mintchev, É. Ragoucy, P. Sorba, *Reflection - Transmission Quantum Yang-Baxter Equations*, J. Phys. **A38** (2005), 3431 et `hep-th/0412159`.
- [VIII] V. Caudrelier, N. Crampé, *Exact results for the one-dimensional many-body problem with contact interaction: including a tunable impurity*, soumis à Phys. Rev. **B** et `cond-mat/0501110`.

Conclusions et perspectives

Ce manuscrit est le recueil des travaux effectués pendant ma thèse qui sont collectés dans la troisième partie. C'est dans cette partie aussi qu'ils sont discutés à la lumière de nombreuses connaissances accumulées dans le domaine des systèmes intégrables et dont j'ai sélectionné certains aspects en vertu du sujet de ma thèse. La synthèse de ces connaissances constitue les deux premières parties du manuscrit.

Dans la première partie, j'ai voulu présenter les idées et les outils au coeur des systèmes intégrables avec comme ligne directrice l'équation de Yang-Baxter qui est indéniablement le pivot fondamental dans l'étude des systèmes intégrables. J'ai tenté de retranscrire cela en présentant différents aspects où cette équation apparaît, sans toutefois prétendre à une présentation exhaustive. Les exemples retenus sont révélateurs de mon travail de thèse et ma volonté était avant tout de fournir les notions essentielles pour bien appréhender les enjeux et l'originalité des travaux effectués en thèse. Cette tendance s'est accentuée dans la deuxième partie où j'ai détaillé une méthode fondamentale connue sous le nom de *méthode de diffusion inverse* (classique et quantique) dans le cadre particulier mais représentatif de l'équation de Schrödinger non-linéaire.

Enfin, la troisième partie fut pour moi l'occasion de faire un bilan sur les apports des recherches entreprises pendant ma thèse. Le contexte particulier du problème des impuretés dans les systèmes intégrables fut pour moi une grande source de stimulation et de plaisir. Les travaux effectués pendant la thèse permettent de mieux comprendre la situation et ont validé le cadre théorique des algèbres Réflexion-Transmission. En outre, les applications potentielles qui se sont dévoilées au fur et à mesure n'ont fait que contribuer à stimuler mon intérêt et sont à la base d'une partie des projets pour l'avenir. En effet, de nombreuses questions restent en suspens tant au niveau théorique qu'au niveau des applications.

Premièrement, une étude systématique de l'algèbre d'impureté, semblable à celle qui existe pour l'algèbre de réflexion, permettrait d'avoir des informations sur les représentations de cette algèbre (autres que les représentations de Fock) et sur son centre. Pour continuer dans les études algébriques, la question de l'ansatz de Bethe algébrique pour un système intégrable avec impureté reste entière. Sa résolution permettrait d'envisager la construction d'autres systèmes intégrables avec impureté comme par exemple des chaînes

de spins.

Dans un autre contexte, la résolution au niveau quantique de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec impureté s'interprète très bien en terme de superposition d'états quantiques transmis et réfléchis. Au niveau classique, la résolution que nous avons proposée consiste en une adaptation de la solution "à la Rosales" pour laquelle cette interprétation n'est plus aussi aisée et le rapport avec les solutions de type "soliton" n'est pas clair. De façon générale, les solutions classiques de type "soliton" de certains systèmes intégrables ne sont pas très bien comprises lorsqu'on inclut une impureté qui réfléchit et transmet. Il reste beaucoup de choses à comprendre à ce sujet.

Deuxièmement, il doit être possible d'utiliser l'algèbre de réflexion comme algèbre de symétrie de l'Hamiltonien général obtenu dans l'article [III] pour construire ses états propres à la façon de [122]. Poursuivant dans ce registre, un problème intéressant serait d'adapter la méthode de [11] à l'algèbre d'impureté. En particulier, l'identification des opérateurs Dunkl en présence d'une impureté reste un problème ouvert. Il est vraisemblable que la connaissance approfondie de l'algèbre RT évoquée ci-dessus sera d'une grande aide dans cette approche, notamment pour identifier l'Hamiltonien dans le centre de l'algèbre. On peut s'attendre alors à découvrir de nouveaux systèmes intégrables en présence d'impureté possédant l'algèbre d'impureté comme algèbre de symétrie.

Enfin, comme nous l'avons dit, l'article [VIII] marque un premier pas vers un autre domaine ayant ses préoccupations propres. On pourrait donc résumer les questions ouvertes dans ce contexte à la question suivante : "Que peuvent apporter ces résultats théoriques pour la compréhension de phénomènes tels que la condensation de Bose-Einstein en présence d'une impureté ou pour l'étude du comportement de gaz quantiques d'atomes ultra-froids?". Une autre piste d'étude concerne le problème de la généralisation de l'approche à N impuretés semblables, différentes, distribuées régulièrement ou aléatoirement. En effet, cela peut avoir des répercussions intéressantes dans la compréhension des propriétés de conduction de matériaux unidimensionnels. En outre, la mesure de la conductance d'un matériau restant une expérience relativement aisée, cela pourrait permettre d'approfondir notre compréhension du comportement quantique.

Bibliographie

- [1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1262.
- [2] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, *Nonlinear evolution equation of physical significance*, Phys. Rev. Lett. **31** (1973), 125.
- [3] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math. **53** (1974), 249.
- [4] M.J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, (Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1981).
- [5] S. Albeverio, L. Dabrowski, P. Kurasov, *Symmetries of Schrödinger operators with point interactions*, Lett. Math. Phys. **45** (1998), 33.
- [6] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag, New-York, 1988).
- [7] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, *Exact Yangian symmetry in the classical Euler-Calogero-Moser model*, Phys. Lett. **A188** (1994), 263.
- [8] R.J. Baxter, *Partition function of the eight vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193 ; *Exactly solved models in statistical mechanics*, (Academic Press, 1982).
- [9] F.A. Berezin, *Method of second quantization*, (Academic Press, New York, 1966).
- [10] F. A. Berezin, L. D. Faddeev, *A remark on Schrödinger's equation with a singular potential*, Soviet Maths. Dokl. **2** (1961), 372.
- [11] D. Bernard, M. Gaudin, F.D.M. Haldane, V. Pasquier, *Yang-Baxter equation in spin chains with long range interactions*, J. Phys. **A26** (1993), 5219.
- [12] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle*, Z. Physik **71** (1931), 205.
- [13] J.M. Blatt, V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (Wiley, New York, 1952), p. 74.
- [14] A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras*, Funct. Anal. and Appl. **16** (1982), 159.
- [15] A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd, *Classical Young-Baxter (sic) equation for simple Lie algebras*, Funct. Anal. and Appl. **17** (1984), 220.
- [16] A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd, *Triangle equation and simple Lie algebras*, Sov. Sci. Rev. sect. **C4** (1984), 93.

- [17] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Classically integrable field theories with defects*, Int. J. Mod. Phys. **A19** (2004), 82.
- [18] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Affine Toda field theories with defects*, JHEP 0401 (2004), 056.
- [19] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 1687.
- [20] C. C. Bradley, C. A. Sackett, R. G. Hulet, *Analysis of in situ images of Bose-Einstein condensates of lithium*, Phys. Rev. **A55** (1997), 3951.
- [21] J. C. Brunelli, A. Das, *Tests of integrability of the supersymmetric non-linear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **36** (1995), 268.
- [22] F. Calogero, *Solution of a Three-Body Problem in One Dimension*, J. Math. Phys. **10** (1969), 2191; *Ground State of a One-Dimensional N-Body System*, J. Math. Phys. **10** (1969), 2197; *Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971), 419 (erratum J. Math. Phys. **37**, 3646).
- [23] F. Calogero, *One-dimensional many-body problems with pair interactions whose exact ground state wave function is of product type*, Lett. Nuovo Cim. **13** (1975), 507.
- [24] O.A. Castro-Alvaredo, A. Fring, F. Göhmann, *On the absence of simultaneous reflection and transmission in integrable impurity systems*, hep-th/0201142.
- [25] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, (Cambridge University Press, 1994).
- [26] T. Cheon, T. Fulop, I. Tsutsui, *Symmetry, Duality and Anholonomy of Point Interactions in One Dimension*, Annals Phys. **294** (2001), 1.
- [27] I.V. Cherednik, *On some S-matrices connected with Abelian varieties*, Dokl. AN SSSR **249** (1979), 1095.
- [28] I.V. Cherednik, *Factorizing particles on a half-line and root systems*, Theor. and Math. Phys. **61** (1984), 977.
- [29] S. Coleman, J. Mandula, *All possible symmetries of the S matrix*, Phys. Rev. **159** (1967), 1251.
- [30] C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto, *Route to Nonlocality and Observation of Accessible Solitons*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 073901.
- [31] D.B. Creamer, H.B. Thacker, D. Wilkinson, *Gelfand-Levitan method for operator fields*, Phys. Rev. **D21** (1980), 1523.
- [32] B. Davies, *Second quantisation of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Phys. **A14** (1981), 2631.
- [33] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 3969.

- [34] B. Davies, E. Gutkin, *Intertwining operators and the quantum inverse method for the nonlinear Schrödinger equation*, Physica **A151** (1988), 167.
- [35] B. Davies, T.D. Kieu, *The quantum inverse method and the nonlinear Schrödinger equation*, Inv. Prob. **2** (1986), 141.
- [36] G. Delfino, G. Mussardo, P. Simonetti, *Statistical Models with a Line of Defect*, Phys. Lett. **B328** (1994), 123.
- [37] G. Delfino, G. Mussardo, P. Simonetti, *Scattering Theory and Correlation Functions in Statistical Models with a Line of Defect*, Nucl. Phys. **B432** (1994), 518.
- [38] P. Dorey, *Exact S-matrices*, hep-th/9810026.
- [39] T.C. Dorlas, *Orthogonality and completeness of the Bethe ansatz eigenstates of the Nonlinear Schroedinger model*, Comm. Math. Phys. **154** (1993), 347.
- [40] V.G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. **32** (1985), 254 ; *Quantum groups*, Int. Cong. of Math., Berkeley USA (1986), 798.
- [41] V.G. Drinfel'd, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 62.
- [42] C.F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167.
- [43] L.D. Faddeev, *Quantum completely integrable models in field theory*, Sov. Sci. Rev. **C1** (1980), 107.
- [44] L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193.
- [45] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin, *Quantum mechanical approach to completely integrable models of field theory*, Dokl. Acad. Nauk. SSSR **243**, No. 6 (1978), 1430.
- [46] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan, *Quantum inverse problem method I*, Theor. Math. Phys. **40** (1980), 688.
- [47] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Quantum inverse scattering method*, Sov. Sci. Rev. Math. **C1** (1981), 107.
- [48] D. Fichera, M. Mintchev, E. Vicari, *Quantum field theories and critical phenomena on defects*, hep-th/0502074.
- [49] F. Finkel, D. Gómez-Ullate, A. González-López, M.A. Rodríguez, R. Zhdanov, *A_N -type Dunkl operators and new spin Calogero-Sutherland models*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 477.
- [50] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, (Academic Press, London, 2000).
- [51] A. Fring, R. Köberle, *Factorized scattering in the presence of reflecting boundaries*, Nucl. Phys. **B421** (1994), 159.
- [52] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095.

- [53] M. Gattobigio, A. Liguori, M. Mintchev, *The Nonlinear Schrödinger equation on the half line*, J. Math. Phys. **40** (1999), 2949.
- [54] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, (Masson, Paris, 1983).
- [55] M. Gaudin, *Boundary energy of a Bose gas in one dimension*, Phys. Rev. **A4** (1971), 386.
- [56] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Am. Math. Soc. Transl. **1** (1955), 259.
- [57] S. Ghoshal, A. Zamolodchikov, *Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994), 3841.
- [58] H. Goldstein, *Classical mechanics*, (Addison-Wesley, 1980).
- [59] E.P. Gross, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Nuovo Cimento **20** (1961), 454.
- [60] H. Grosse, *On the construction of Møller operators for the nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Lett. **B86** (1979), 267.
- [61] H. Grosse, E. Langmann, C. Paufler, *Exact solution of a 1D many-body system with momentum dependent interactions*, J. Phys. **A37** (2004), 4579.
- [62] E. Gutkin, *Quantum nonlinear Schrödinger equation: Two solutions*, Phys. Rep. **167** (1988), 1.
- [63] F.D.M. Haldane, *Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valence-bond ground state of the spin- $\frac{1}{2}$ antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/r^2$ exchange*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 635.
- [64] F.D.M. Haldane, Z.N.C. Ha, J.C. Talstra, D. Bernard, V. Pasquier, *Yangian symmetry of integrable quantum chains with long-range interactions and a new description of states in conformal field theory*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 2021.
- [65] W. Heisenberg, *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Physik **49** (1928), 619.
- [66] R. Hirota, *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation*, J. Math. Phys. **14** (1973), 805.
- [67] K. Huang, *Statistical mechanics*, second edition, (John Wiley & Sons, 1987).
- [68] K. Huang, C. N. Yang, *Quantum mechanical many-body problem with hard sphere interaction*, Phys. Rev. **105** (1956) 767.
- [69] A.G. Izergin, V.E. Korepin, *The quantum inverse scattering method approach to correlation functions*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), 67.
- [70] C.G.J. Jacobi, J. de Crelle **17** (1837).
- [71] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63.
- [72] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math **26** (1977), 8.
- [73] V. G. Kac, *A sketch of Lie superalgebra theory*, Comm. Math. Phys. **53** (1977), 31.

- [74] D.J. Kaup, *Exact quantization of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **16** (1975), 2036.
- [75] Y.S. Kivshar, X. Yang, *Perturbation-induced dynamics of dark solitons*, Phys. Rev. **E49** (1994), 1657.
- [76] D.J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. **39** (1895), 442.
- [77] P.P. Kulish, *Multicomponent nonlinear Schrödinger equations with graded matrices*, Sov. Phys. Dokl. **25** (1980), 912.
- [78] P. Kurasov, *Distribution theory for the discontinuous test functions and differential operators with the generalized coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **201** (1996), 297.
- [79] P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math. **21** (1968), 467.
- [80] J.M. Leinaas, J. Myrheim, *On the theory of identical particles*, Nuovo Cimento **37B** (1977), 1.
- [81] J.M. Leinaas, J. Myrheim, *Intermediate statistics for vortices in superfluid films*, Phys. Rev. **B37** (1988), 9286.
- [82] E. H. Lieb, W. Liniger, *Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the ground state*, Phys. Rev. **130** No. 4 (1963) 1605.
- [83] A. Liguori, M. Mintchev, *Fock Representations of Quantum Fields with Generalized Statistic*, Comm. Math. Phys. **169** (1995), 635.
- [84] A. Liguori, M. Mintchev, L. Zhao, *Boundary exchange algebras and scattering on the half line*, Commun. Math. Phys. **194** (1998), 569.
- [85] J. Liouville, J. Math. **18** (1853).
- [86] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc. **2**, (1989), 599.
- [87] V.A. Marchenko, *On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves*, Dokl. Acad. Nauk SSSR, **104** (1955), 695.
- [88] J.B. McGuire, *Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems*, J. Math. Phys. **5** (1964), 622.
- [89] J.A. Minahan, A.P. Polychronakos, *Integrable systems for particles with internal degrees of freedom*, Phys. Lett. **B302** (1993), 265.
- [90] M. Mintchev, É. Ragoucy, *Interplay between Zamolodchikov-Faddeev and Reflection-Transmission algebras*, J. Phys. **A37** (2004), 425.
- [91] M. Mintchev, É. Ragoucy, P. Sorba, *Spontaneous symmetry breaking in the $gl(N)$ -NLS hierarchy on the half line*, J. Phys. **A34** (2001), 8345.
- [92] M. Mintchev, É. Ragoucy, P. Sorba, *Reflection-Transmission Algebras*, J. Phys. **A36** (2003), 10407.
- [93] M. Mintchev, É. Ragoucy, P. Sorba, Ph. Zaugg, *Yangian symmetry in the Non Linear Schrödinger hierarchy*, J. Phys. **A32** (1999), 5885.

- [94] M. Mintchev, P. Sorba, *Finite Temperature Quantum Field Theory with Impurities*, JSTAT **0407** (2004), P001.
- [95] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205.
- [96] A.I. Molev, É. Ragoucy, *Representations of reflection algebras*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 317.
- [97] S. Murakami, M. Wadati, *Connection between Yangian symmetry and the quantum inverse scattering method*, J. Phys. **A29** (1996), 7903.
- [98] M.L. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123.
- [99] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Quantum completely integrable systems connected with semisimple Lie algebras*, Lett. Math. Phys. **2** (1977), 7.
- [100] M. Olshanii, *Atomic scattering in presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons*, Phys. Rev. Lett. **81**, (1998) 938.
- [101] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G.V. Shlyapnikov, T.W. Hänsch, I. Bloch, *Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*, Nature **429** (2004) 277.
- [102] S. Parke, *Absence of particle production and factorization of the S-matrix in 1+1 dimensional models*, Nucl. Phys. **B** 174 (1980), 166.
- [103] L.P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Sov. Phys. JETP **13** (1961), 451.
- [104] W. Pogorzelski, *Integral equations and their applications*, (Pergamon Press, London, 1966).
- [105] A.P. Polychronakos, *Exchange operator formalism for integrable systems of particles*, Phys. Rev. Lett. **69**, 703.
- [106] Z. Popowicz, *The extended supersymmetrization of the nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Lett. **A194** (1994), 375.
- [107] É. Ragoucy, *Quantum group symmetry of integrable systems with or without boundary*, Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002), 3649.
- [108] É. Ragoucy, *Vertex operators for quantum groups and application to integrable systems*, J.Phys. **A35** (2002), 7929.
- [109] L. Randall, R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3370.
- [110] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol I: Functional Analysis*, (Academic Press, New York, 1972)
- [111] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol II: Fourier Analysis, Self-adjointness*, (Academic Press, New York, 1975)
- [112] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol III: Scattering theory*, (Academic Press, New York, 1979).
- [113] R.R. Rosales, *Exact solutions of some nonlinear evolution equations*, Stud. Appl. Math. **59** (1978), 117.
- [114] B. Schroer, *Two-dimensional models*, hep-th/0502125.

- [115] B.S. Shastry, *Exact solution of an $S = \frac{1}{2}$ Heisenberg chain with long-ranged interactions*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 639.
- [116] Y. M. Shirokov, Theor. Math. Phys. **46** (1981), 191; B. S. Pavlov, Theor. Math. Phys. **59** (1984), 544.
- [117] E.K. Sklyanin, *Method of the inverse scattering problem and quantum nonlinear Schrödinger equation*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **244**, No. 6 (1978), 1337.
- [118] E.K. Sklyanin, *On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation*, preprint Leningrad Branch of the Mathematics Institute, **E-3-79** (1979).
- [119] E.K. Sklyanin, *Quantum version of the method of the inverse scattering problem*, J. Sov. Math. **19** (1982), 1546 (Translation of PhD dissertation).
- [120] E.K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, J. Phys. **A21** (1988), 2375.
- [121] B. Sutherland, *Quantum Many-Body Problem in One Dimension: Ground State*, J. Math. Phys. **12** (1971), 246; *Quantum Many-Body Problem in One Dimension: Thermodynamics*, J. Math. Phys. **12** (1971), 251; *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension*, Phys. Rev. **A4** (1971), 2019.
- [122] K. Takemura, *The Yangian symmetry in the spin Calogero model and its applications*, J. Phys. **A30** (1997), 6185.
- [123] K. Takemura, D. Uglov, *The orthogonal eigenbasis and norms of eigenvectors in the spin Calogero-Sutherland model*, J. Phys. **A30** (1997), 3685.
- [124] V.O. Tarasov, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev, *Local Hamiltonians for quantum integrable models on the lattice*, Teor. Mat. Fis. **57** (1983), 163.
- [125] H.B. Thacker, D. Wilkinson, *Inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory*, Phys. Rev. **D19** (1979), 3660.
- [126] J. von Neumann, Math. Ann. **102** (1929), 49.
- [127] A. Wiesler, *Derivation of "Bethe's hypothesis" from the quantum inverse scattering transformation for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **22** (1981), 750.
- [128] C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312.
- [129] C.N. Yang, *S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive δ -function interaction*, Phys. Rev. **168** (1968), 1920.
- [130] C.N. Yang, C.P. Yang, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system*, Phys. Rev. **150** (1966), 321.
- [131] V.E. Zakharov, L.D. Faddeev, *Korteweg-de Vries equation, a complete integrable hamiltonien system*, Funct. Anal. and Appl. **5** (1971), 280.

- [132] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, *On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation*, Theor. Math. Phys. **19** (1975), 551.
- [133] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972), 62.
- [134] A.B. Zamolodchikov, *Exact two-particle S-matrix of quantum sine-Gordon solitons*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 183.
- [135] A.B. Zamolodchikov, Al.B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models*, Annals of Phys. **120** (1979), 253.